Universitatea Transilvania din Braşov
Laboratorul de Vedere Artificială Robustă şi Control

Metode Numerice

Curs 6

Metode de derivare numerică

Gigel Măceșanu

Cuprins

- Introducere
- Aproximare utilizându-se 2 puncte
- Eroare de trunchiere
- Aproximare utilizându-se 3 puncte
- Derivarea cu ajutorul dezvoltărilor în serie Taylor

Derivarea numerică

- **Este utilizată pentru evaluarea derivatelor unei funcții în cazul în care valorile funcționale sunt date în puncta (nu se cunoaște expresia analitică a funcției)**

- **Derivarea unei funcții $f(x)$ în punctul $x = x_0$ este definită ca:**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

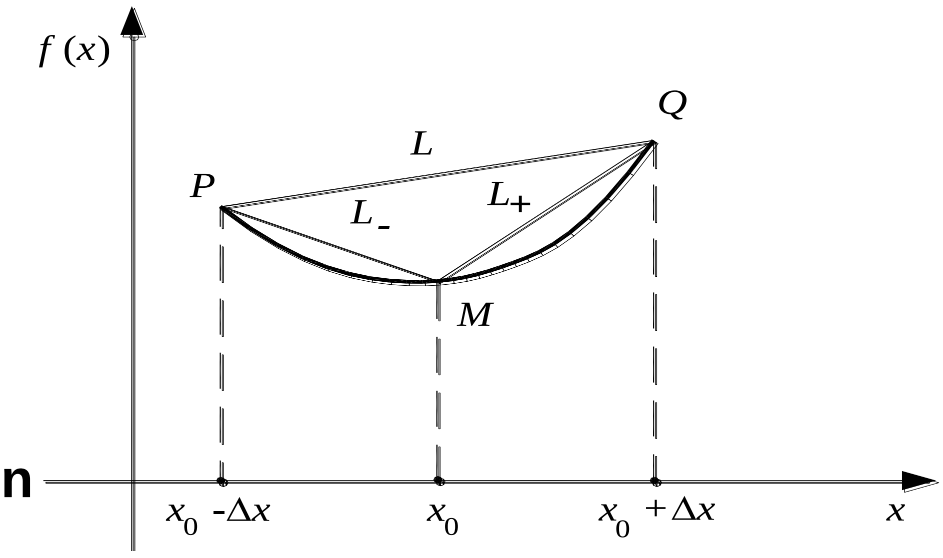
- **Aproximarea derivatei se poate face utilizând-se două sau mai multe puncta de pe graficul funcției**

Aproximare utilizându-se 2 puncte

- Pentru valori mici ale lui Δx, avem o aproximare buna pentru $f'(x_0)$
- Se poate aproxima valoarea derivatei funcției în punctul de abscisă x_0 fie cu panta dreptei *MQ* (*L*+) fie cu panta dreptei *MP* (L_) atunci când $\Delta x < 0$:

$$\Delta x > 0 \quad \Rightarrow \quad L^{+} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x < 0 \quad \Rightarrow \quad L^{-} = \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}$$



- Se poate aproxima derivata și prin panta dreptei *PQ* a cărei valoare este egală cu media aritmetică a pantelor dreptelor (L+) și (L_), deci:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x}$$

Aproximare utilizându-se 2 puncte

- Notând $h = 2\Delta x$ se obține în final relația:

$$f'(x_0) = \frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)}{h}$$

- care reprezintă formula de aproximare numerică a derivatei unei funcții utilizând două puncte ale graficului.
- obținerea unei relații de calcul pentru derivata de ordinul 2 a unei funcții se face astfel:

$$f''(x_0) = \frac{f'\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f'\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0 - h) - f(x_0)}{h^2}$$

- Rezultă deci: $$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2 \cdot f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

Erori de trunchiere

- **Pentru derivata de ordinul I și II, pornim de la teorema lui Taylor:**

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)}{3!}f'''(\xi)$$

unde, $\xi \in [x, x_0]$**.**

- **Se înlocuiește x cu $x_0 + h/2$, și obținem:**

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = f(x_0) + \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{h^2}{8}f''(x_0) + \frac{h^3}{48}f'''(\xi_1),\ \ x_0 \ll \xi_1 \ll x_0 + \frac{h}{2}$$

- **Similar pentru înlocuirea lui x cu $x_0 - h/2$, și obținem:**

$$f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) = f(x_0) - \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{h^2}{8}f''(x_0) - \frac{h^3}{48}f'''(\xi_2),$$

Unde $x_0 - h/2 \ll \xi_2 \ll x_0$

Erori de trunchiere

- Se scade ultima expresie din penultima si rezultă:

$$f'(x_0) = \frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f(x_0 - \frac{h}{2})}{h} - \frac{h^2}{24} \cdot \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}$$

- Dacă $f'''(x)$ este continuă, conform teoremei valorii medii, există

$\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ astfel încât:

$$\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = f'''(\xi)$$

deci, $f'(x_0) = \frac{f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-f(x_0-\frac{h}{2})}{2} - \frac{h^2}{24} f'''(\xi)$. Unde, $x_0 - \frac{h}{2} \ll \xi \ll x_0 + \frac{h}{2}$

- Scăzând valoarea reală ($\frac{f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f(x_0-\frac{h}{2})}{h}$)– valoarea aproximativă determinată anterior obținem:

$$e_t = \frac{h^2}{24} f'''(\xi)$$

Aproximare utilizându-se 3 puncte

- Derivata funcției $f(x)$ în punctul x_0 se poate scrie:

$$f'(x_0) = af(x_0 - h_1) + bf(x_0) + cf(x_0 + h_2)$$

Unde, x_0, h_1, h_2 sunt date cunoscute, iar a, b, c date necunoscute.

- Consideram 3 cazuri de reprezentare pentru $f(x)$:
  - $f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0, f'(x_0) = 0$ iar ecuația este $0 = a + b + c$
  - $f(x) = (x - x_0) \Rightarrow f'(x) = 1, f'(x_0) = 1$ și $1 = -h_1 a + 0b + h_2 c$
  - $f(x) = (x - x_0)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x - x_0), f'(x_0) = 0$ și ecuația este $0 = h_1^2 a + 0b + h_2^2 c$

- Deoarece $h_1, h_2 > 0$ și determinantul $\Delta = h_1 h_2 (h_1 + h_2) \neq 0$ avem:

$$a = \frac{-h_2}{h_1(h_1 + h_2)}, b = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)}, c = \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)}$$

Aproximare utilizându-se 3 puncte

- **Formula derivatei funcției $f(x)$ prin trei puncte se poate scrie:**

$$f'(x_0) \approx \frac{h_1^2 f(x_0 + h_2) + \left(h_2^2 - h_1^2\right) f(x_0) - h_2^2 f(x_0 - h_1)}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)}$$

- **Eroarea de trunchiere este dată de formula:**

$$e_T = \frac{h_1 h_2}{6(h_1 + h_2)} \left[h_2 f'''(\xi_1) + h_1 f'''(\xi_2)\right]$$

Unde, $\xi_1 \in [x_0 - h_1, x_0]$ **iar** $\xi_2 \in [x_0, x_0 + h_2]$

- **Dacă** $|f'''(x)| < M$, **pentru orice** $x \in [x_0 - h_1, x_0 + h_2]$ **atunci:**

$$e_T \leq \frac{h_1 h_2}{6} M$$

Derivarea cu ajutorul dezvoltărilor în serie Taylor

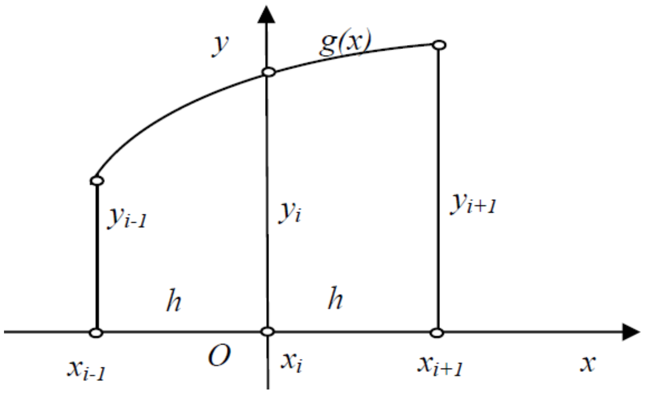
- Calculul derivatei unei funcții $f(x)$ în punctul x_i cunoscându-se valorile ei $y_0, y_1, \cdots, y_i, y_{i+1}, \cdots, y_n$ într-o vecinătate a punctului x_i notată cu $x_0, x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n$ se poate face utilizându-se formulele de dezvoltare în serie Taylor a $f(x)$:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x) + \cdots$$

- Considerăm: $x = x_i, x - h = x_{i-1}, x + h = x_{i+1}, f(x) = y_i, f(x-h) = y_{i-1}, f(x+h) = y_{i+1}$, atunci avem:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y_i''' + \frac{h^4}{24} y_i^{IV} + \cdots$$

$$y_{i-1} = y_i - hy_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' - \frac{h^3}{6} y_i''' + \frac{h^4}{24} y_i^{IV} - \cdots$$



➢ Adunând cele două relații obținem:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 y_i'' + \frac{h^4}{12} y_i^{IV} + \cdots$$

Derivarea cu ajutorul dezvoltărilor în serie Taylor

- Neglijând termenii care conțin $h^4, h^6, \ldots.$ obținem formula derivatei de ordinul doi pentru funcția $f(x)$ în punctul x_i:

$$y_i'' = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

➢ **Scăzând cele două relații obținem:**

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2hy_i + \frac{h^3}{3}y_i''' + \cdots$$

- Neglijând termenii care conțin $h^3, h^5, \ldots.$ obținem formula derivatei de ordinul unu pentru funcția $f(x)$ în punctul x_i:

$$y_i' = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})$$

Derivarea cu ajutorul dezvoltărilor în serie Taylor

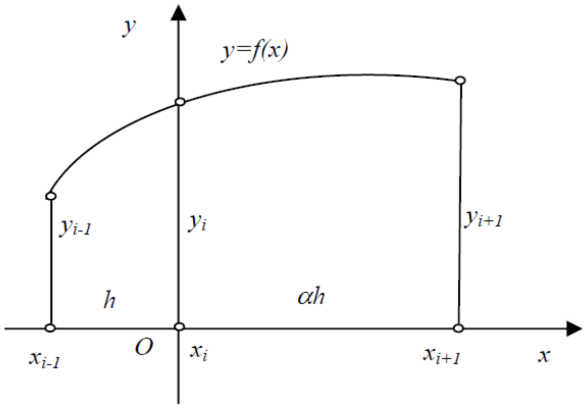
- **Pentru intervale neegale, aplicam același principiu**
- **Considerăm:** $x = x_i, x - h = x_{i-1}, x + \alpha h = x_{i+1}, f(x) = y_i, f(x - h) = y_{i-1}, f(x + \alpha h) = y_{i+1}$, **atunci avem:**

$$y_{i+1} = y_i + \alpha h y_i' + \frac{\alpha^2 h^2}{2} y_i'' + \frac{\alpha^3 h^3}{6} y_i''' + \frac{\alpha^4 h^4}{24} y_i^{IV} + \cdots$$

$$y_{i-1} = y_i - h y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' - \frac{h^3}{6} y_i''' + \frac{h^4}{24} y_i^{IV} - \cdots$$

> **Scădem din prima relație a doua multiplicată cu α^2 obținem:**

$$y_{i+1} - \alpha^2 y_{i-1} = (1 - \alpha^2) y_i + (\alpha + \alpha^2) h y_i' + (\alpha^3 - \alpha^2)\frac{h^3}{6} y_i''' + (\alpha^4 - \alpha^2)\frac{h^4}{24} y_i^{IV} + \cdots$$



> **Neglijăm termenii h^3, h^4, … obținem:**

$$y_i' = \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)h}\left(y_{i+1} - (1 - \alpha^2) y_i - \alpha^2 y_{i-1}\right)$$

Derivarea cu ajutorul dezvoltărilor în serie Taylor

- **Dacă se adună prima relație cu a doua multiplicată cu α obținem:**

$$\boldsymbol{y_{i+1} - (1-\alpha)y_i + \alpha y_{i-1} =}$$

$$\boldsymbol{= (\alpha^2 + \alpha)\frac{h^2}{2}y_i'' + (\alpha^3 - \alpha)\frac{h^3}{2}y_i''' + (\alpha^4 + \alpha)\frac{h^4}{24}y_i^{IV} + \cdots}$$

- **Neglijăm termenii cu $h^3, h^4, \ldots$ obținem formula de calcul a derivatei a doua pentru funcția $f(x)$ în punctul x_i:**

$$\boldsymbol{y'' = \frac{2}{\alpha(\alpha+1)h^2}[y_{i+1} - (1-\alpha)y_i + \alpha y_{i-1}]}$$

Contact:
Email: gigel.macesanu@unitbv.ro
Web: rovis.unitbv.ro