Universitatea Transilvania din Braşov
Laboratorul de Vedere Artificială Robustă şi Control

Bazele Roboticii

Curs 06

Modelul geometric al roboţilor

Gigel Măceșanu

Cuprins

- Introducere
- Modelul cinematic direct
- Modelul cinematic invers
- Controlul unui manipulator cu ajutorul Jacobianului
- Definirea relațiilor diferențiale

Introducere

- Trebuie să se realizeze transferul parametrilor poziționali din coordonate interne (robot) în coordonate operaționale (poziție în spațiul 3D și orientare față de un reper asociat bazei robotului)
- Se pot utiliza două modele:
  - Model cinematic direct
  - Model cinematic invers

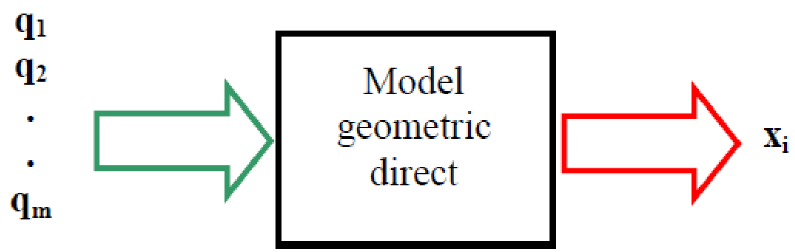
- Este posibilă realizarea unui mecanism de control pentru roboți care să poată fi adaptat la particularitățile diferitelor structuri mecanice

Model cinematic direct

- *Modelul geometric direct* permite determinarea poziției și orientării dispozitivului efector (TCP, sculă) date de coordonatele operaționale x_i în funcție de coordonatele articulare q_j furnizate de traductoarele de poziție montate pe axele robotului.
- Sunt necesare următoarele ipoteze simplificatoare:
  - Baza robotului este fixă și acesteia i se atașează sistemul de referință global WCS de axe $O_0X_0Y_0Z_0$;
  - Structura mecanică este formată din segmente rigide;
  - Cuplele cinematice sunt fără frecări, neelastice și fără jocuri;
  - Nu există obstacole în volumul de lucru al robotului;
  - Pentru execuția sarcinilor de lucru este suficient controlul poziției și orientării dispozitivului

Model cinematic direct

- Modelul geometric direct se poate reprezenta geometric în felul următor:



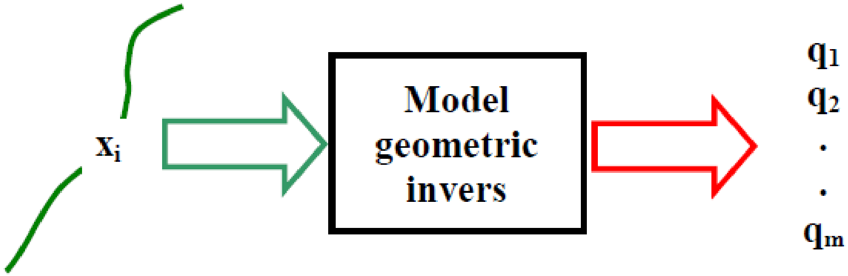
- Modelul geometric este format dintr-un set de ecuații algebrice, sau o ecuație matriceală, care permite în mod explicit calculul valorilor coordonatelor operaționale, în funcție de poziția spațială a axelor robotului definită de coordonatele articulare:

$$x_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_m);\ [X] = [F][Q]$$

- Modelul cinematic direct se poate obține folosind metodele matriceale:
  - Metoda cosinusurilor, metoda Denavit–Hartenberg

Model cinematic invers

- *Modelul geometric invers* permite determinarea configurației în care trebuie să ajungă structura mecanică a robotului (a vectorului coordonatelor articulare q_i) astfel încât dispozitivul efector să fie poziționat în poziția dorită x_i:



- Este utilizat pentru programarea deplasării dispozitivului efector al roboților, direct în sistemul de coordonate al sculei TCS
- Calcularea vectorului de comandă q_m a articulațiilor robotului presupune determinarea soluției ecuației:
  - $q_m = f_m^{-1}(x_1, x_2., \ldots, x_i),\ \ [Q] = [F]^{-1}[X]$

Model cinematic invers

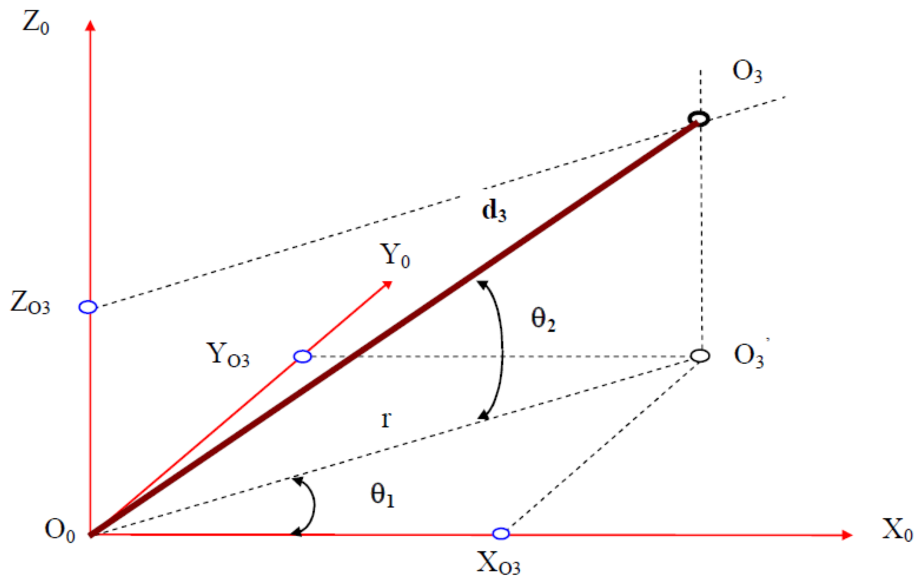
- **Exemplu: Determinarea modelului geometric invers pe baza analizei geometrice**
  - **Structură mecanică cu 3DOF, reprezentată în funcție de θ_1, θ_2, d_3**
  - **Se cunoaște poziția impusă $[X_{03}, Y_{03}, Z_{03}]_{WCS}$**
  - **Se dorește determinarea vectorului de comandă q a axelor**
  - **Astfel avem:**

$$r = \sqrt{X_{o3}^2 + Y_{03}^2}$$

$$\theta_1 = arctg\frac{Y_{o3}}{X_{03}}$$

$$\theta_2 = arctg\frac{Z_{03}}{r}$$

$$d_3 = \sqrt{r^2 + Z_{03}^2}$$



Model cinematic invers

- **Exemplu: Determinarea modelului geometric invers pe baza analizei geometrice**
  - **Vectorul de comandă a axelor în funcție de poziția impusă punctului terminal O_3 pe traiectorie este:**

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} arctg\dfrac{Y_{o3}}{X_{03}} \\ arctg\dfrac{Z_{03}}{\sqrt{X_{o3}^2 + Y_{03}^2}} \\ \sqrt{X_{o3}^2 + Y_{03}^2 + Z_{03}^2} \end{bmatrix}$$

  - **Metoda geometrică prezentată poate fi aplicată doar pentru roboții cu maxim 3 DOF**

Controlul unui manipulator cu ajutorul Jacobianului

- Poziția și orientarea dispozitivului efector este evaluată în relație cu pozițiile articulațiilor (obținute din ecuațiile cinematice)
- *Mișcarea diferențială* are în vedere cele amintite dar și viteza la care se mișcă dispozitivul efector
- Pentru coordonarea mișcării articulațiilor sunt necesare:
  - Definirea relațiilor diferențiale dintre deplasarea articulațiilor și locația dispozitivului efector
  - Rezolvarea relațiilor diferențiale pentru mișcări individuale ale articulațiilor
- Matricea *Jacobian* înglobează relațiile diferențiale dintre deplasarea articulațiilor și mișcarea dispozitivului efector

Definirea relațiilor diferențiale

- Considerăm un braț robotic cu două grade de libertate
- Ecuațiile cinematice ce fac legătura între dispozitivul efector și deplasările articulațiilor θ_1 și θ_2 sunt:

$$x_e(\theta_1, \theta_2) = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_e(\theta_1, \theta_2) = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

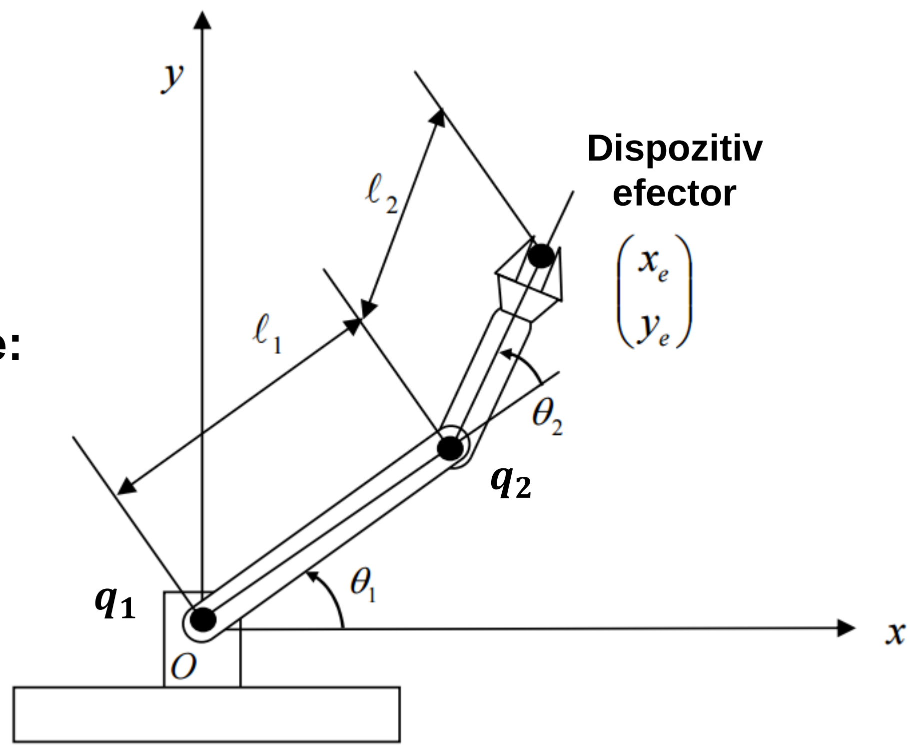
- Mișcarea dispozitivului efector se

obține din derivarea relațiilor anterioare:

$$dx_e = \frac{\partial x_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial x_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2$$

$$dy_e = \frac{\partial y_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial y_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2$$

x_e și y_e depind de θ_1 și θ_2



Definirea relațiilor diferențiale

- **Sub formă vectorială, ecuațiile anterioare se scriu:**

$$d\boldsymbol{x} = \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{q}$$

unde: $dx = \begin{pmatrix} dx_e \\ dy_e \end{pmatrix},\ d\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_e(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_e(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y_e(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_e(\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}$

- **Matricea J reprezintă *matricea Jacobian***

- **Matricea Jacobian reprezintă relațiile diferențiale dintre deplasamentul articulațiilor și mișcarea rezultată a efectorului final**

- **Pentru un robot cu 2DOF, componentele matricii Jabocian sunt determinate astfel:**

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{l}_1 \sin\theta_1 - \boldsymbol{l}_2 \sin(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2) & -\boldsymbol{l}_2 \sin(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2) \\ \boldsymbol{l}_1 \cos\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{l}_2 \cos(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2) & \boldsymbol{l}_2 \cos(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2) \end{pmatrix}$$

Definirea relațiilor diferențiale

- Considerăm un braț robotic cu trei grade de libertate
- Ecuațiile cinematice ce fac legătura între dispozitivul efector și deplasările articulațiilor θ_1, θ_2 și θ_3 sunt:

$$\boldsymbol{x_e}(\boldsymbol{\theta_1},\boldsymbol{\theta_2},\boldsymbol{\theta_3}) = \boldsymbol{l_1}\cos\boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{l_2}\cos(\boldsymbol{\theta_1}+\boldsymbol{\theta_2}) + \boldsymbol{l_3}\cos(\boldsymbol{\theta_1}+\boldsymbol{\theta_2}+\boldsymbol{\theta_3})$$

$$\boldsymbol{y_e}(\boldsymbol{\theta_1},\boldsymbol{\theta_2},\boldsymbol{\theta_3}) = \boldsymbol{l_1}\sin\theta_1 + \boldsymbol{l_2}\sin(\boldsymbol{\theta_1}+\boldsymbol{\theta_2}) + \boldsymbol{l_3}\sin(\boldsymbol{\theta_1}+\boldsymbol{\theta_2}+\boldsymbol{\theta_3})$$

- Mișcarea dispozitivului efector se obține din derivarea relațiilor anterioare:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{e}} = -\boldsymbol{l_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_1\boldsymbol{s_1} - \boldsymbol{l_2}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \dot{\boldsymbol{\theta}}_2)\boldsymbol{s_{12}} - \boldsymbol{l_3}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 + \dot{\boldsymbol{\theta}}_3)\boldsymbol{s_{123}}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{l_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_1\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{l_2}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \dot{\boldsymbol{\theta}}_2)\boldsymbol{c_{12}} + \boldsymbol{l_3}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 + \dot{\boldsymbol{\theta}}_3)\mathbf{c_{123}}$$

unde: $\boldsymbol{s_1} = \sin\boldsymbol{\theta_1}$, $\boldsymbol{s_{12}} = \sin(\boldsymbol{\theta_1}+\boldsymbol{\theta_2})$, $\boldsymbol{s_{123}} = \sin(\boldsymbol{\theta_1}+\boldsymbol{\theta_2}+\boldsymbol{\theta_3})$

$\boldsymbol{c_1} = \cos\boldsymbol{\theta_1}$, $\boldsymbol{c_{12}} = \cos(\boldsymbol{\theta_1}+\boldsymbol{\theta_2})$, $\boldsymbol{c_{123}} = \cos(\boldsymbol{\theta_1}+\boldsymbol{\theta_2}+\boldsymbol{\theta_3})$

Definirea relațiilor diferențiale

- Sub formă vectorială, ecuațiile anterioare se scriu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

- Matricea 3x3 este Jacobianul:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

- Vectorul mișcării articulațiilor, respectiv efectorului final se scriu:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \qquad \dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix}$$

- Dacă matricea J este nesingulară, atunci: $\dot{p} = \mathbf{J}\dot{q}, \quad \dot{q} = \mathbf{J}^{-1}\dot{p}$

Definirea relațiilor diferențiale

- **Dacă un task este specificat din punct de vedere al mișcării (vitezei) efectorului final, ecuația anterioară permite determinarea mișcării (vitezei) articulației (cu J nesingulară):**

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}^{dorit} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\dot{x}_e\\ \dot{y}_e\\ \dot{\Phi}\end{bmatrix}^{dorit}$$

- **Prin calcule se poate demonstra că J este o matrice singulară doar când θ_2 este 0 sau 180 de grade**
  - **Fizic, această poziție corespunde unei configurații extinsă complet sau flexată complet**
  - **Atâta timp cât sunt evitate cele două configurații, robotul poate avea orice mișcare (viteză) pentru efectorul final**

Contact:
Email: gigel.macesanu@unitbv.ro
Web: rovis.unitbv.ro