Universitatea Transilvania din Braşov
Laboratorul de Vedere Artificială Robustă şi Control

# Bazele Roboticii

# Curs 05

## Modelarea roboților

Gigel Măceșanu

# Cuprins

- Introducere
- Reprezentarea unui punct în sisteme de coordonate
- Transformări de coordonate

# Introducere

- **Modelarea sistemului mecanic al roboților reprezintă etapa de bază pentru elaborarea comenzilor axelor, în conformitate cu obiectivul de mișcare**
- **Modele de comandă:**
  - ***Model geometric*: permite calculul în regim static al pozițiilor structurii mecanice, considerată ca fiind formată din corpuri elementare rigide de formă regulată, cu dimensiuni și mase cunoscute**
  - ***Modelul cinematic*: permite calculul în regim static al vitezelor structurii mecanice considerată ca fiind formată din corpuri elementare rigide**
  - ***Modelul dinamic*: Permite calculul în regim dinamic al cuplurilor și forțelor active și rezistente având în vedere forțele de inerție, gravitaționale, exterioare și admițând o serie de ipoteze simplificatoare: inflexibilitatea segmentelor și articulațiilor mecanice, se neglijează efectul forțelor Coriolis**

# Reprezentarea unui punct în sisteme de coordonate

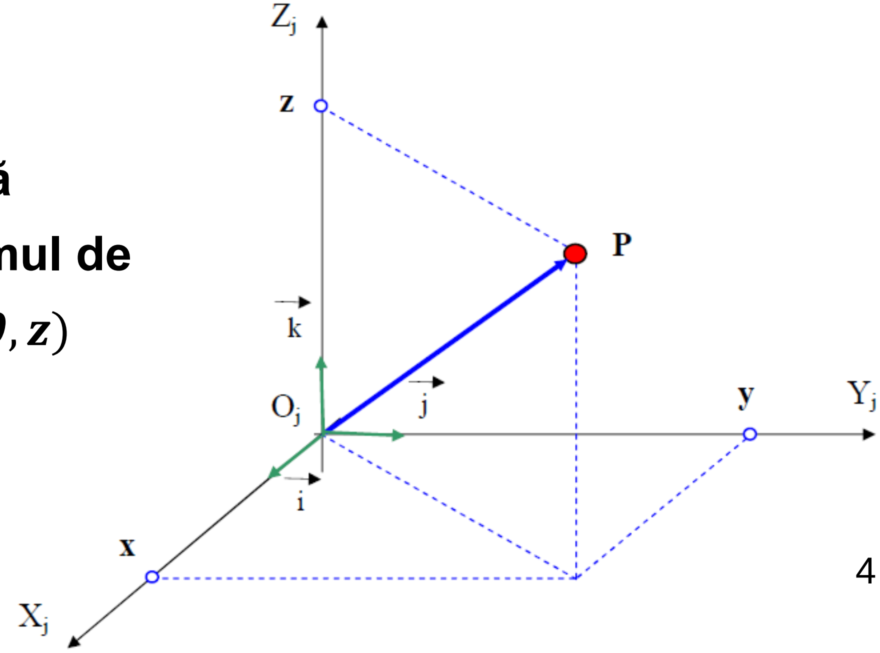
- **Un punct într-un sistem cartezian $O_jX_jY_jZ_j$, de versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ este determinat de trei coordonate carteziene: $P(x, y, z)$**

- **Vectorul $\overrightarrow{O_jP}$ ce determină poziția punctului $P$ se determină astfel:**

$$\overrightarrow{O_jP} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

- **Utilizat pentru modelarea roboților cu structură mecanică carteziană**

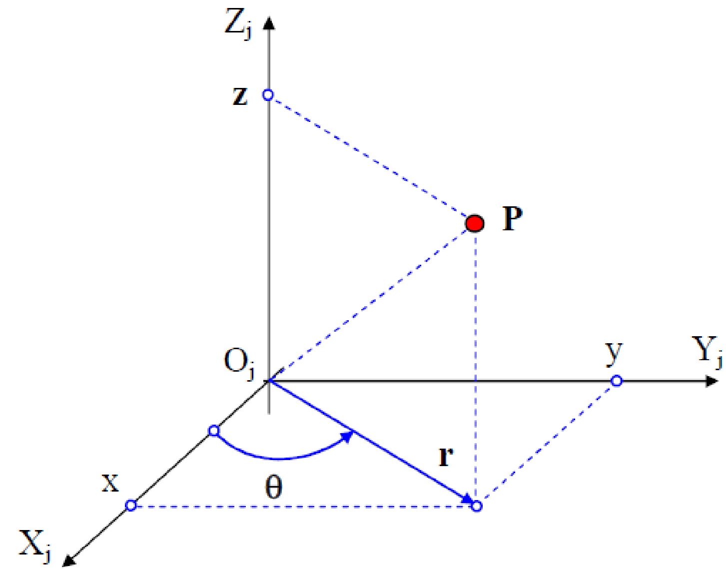
- **Pentru modelarea roboților cu structură mecanică cilindrică, se utilizează sistemul de referință în coordonate cilindrice: $P(r, \theta, z)$**

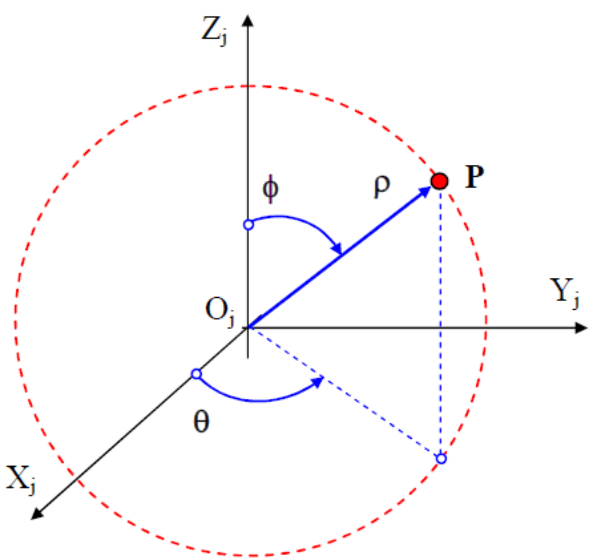


# Reprezentarea unui punct în sisteme de coordonate

- **Conversia între cele două sisteme se poate face utilizându-se relațiile:**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \\ z = z \end{cases}$$




- **Reprezentarea unui punct într-un sistem de coordonate sferice $P(\rho, \theta, \phi)$ se face în funcție de raza de poziție $\rho$ și unghiurile de azimut $\theta$ și elevație $\phi$**

# Reprezentarea unui punct în sisteme de coordonate

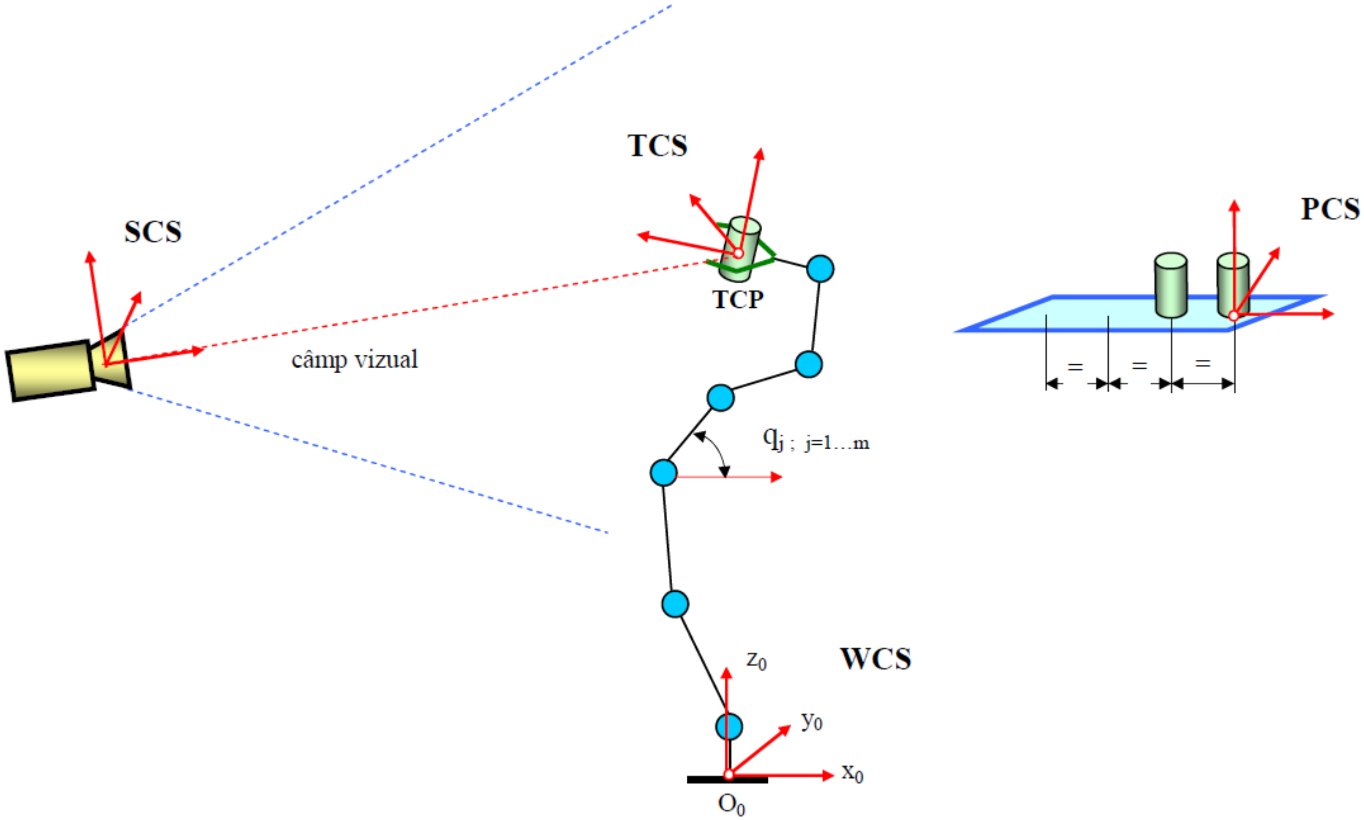
- **Conversia între sistemul sferic și cel cartezian se poate face utilizându-se:**

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta, \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

- **Unui robot i se pot atașa următoarele sisteme de referință:**
  - ***sistemul de referință absolut* WCS (W*orld Coordinate System*), este sistemul de referință legat de baza robotului, într-un punct stabilit de constructor și în raport cu care se determină toate pozițiile sistemului mecanic;**
  - ***sistemul de referință al sculei* TCS (T*ool Coordinate System*), este sistemul de referință atașat în punctul activ al dispozitivului de prehensiune al sculei**
  - ***sistemul de referință al senzorului* SCS (*Sensor Coordinate System*), este sistemul de referință legat uzual de un senzor de viziune care are în câmpul său vizvizual, sau de măsură, efectorul ale cărui poziții le determină**

# Reprezentarea unui punct în sisteme de coordonate

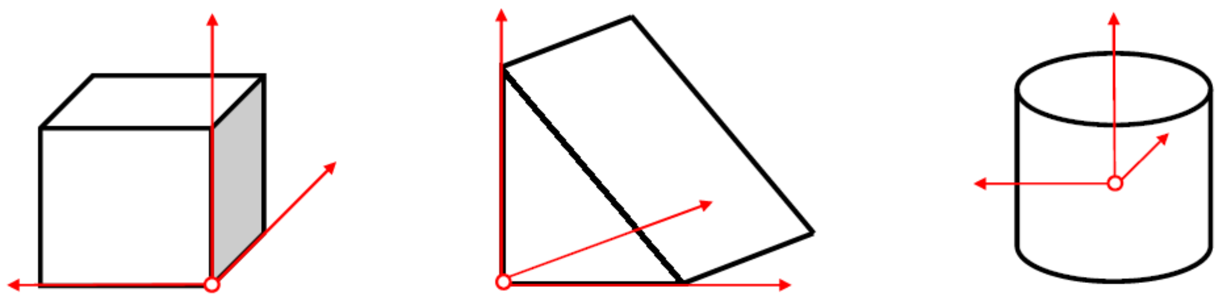
- **Unui robot i se pot atașa următoarele sisteme de referință:**
  - ***sistemul de referință al programatorului* PCS (P*rogram Coordinate System*), este un sistem de referință definit de programator în raport cu WCS, pentru a simplifica operațiile de calcul ale traiectoriilor de lucru majoritare**



# Transformări de coordonate

- Reprezentarea unui corp solid în sistemele de coordonate

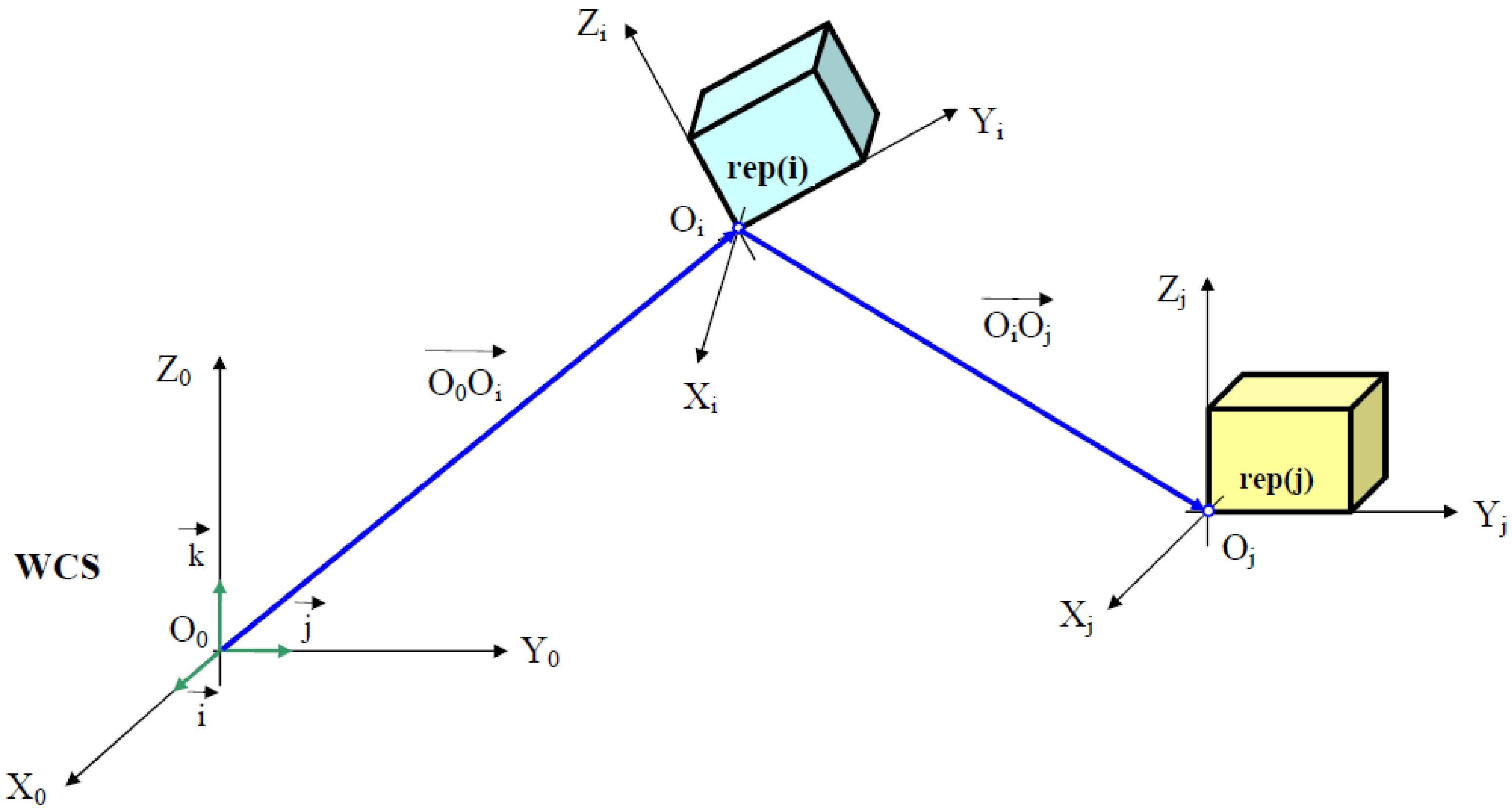
  - Pentru a caracteriza deplasarea spațială a unui solid, acestuia i se asociază un sistem de referință orientat după o direcție și o origine



  - În raport cu WCS (legat de baza robotului $O_0X_0Y_0Z_0$), poziția unui corp solid în spațiul cartezian este determinată dacă se cunoaște:
    - Poziția originii $O_i$ a sistemului de coordonate asociat solidului
    - Orientarea axelor sistemului de coordonate $O_iX_iY_iZ_i$ în raport cu coordonatele absolute WCS

# Transformări de coordonate

- Reprezentarea unui corp solid în sistemele de coordonate




➢ $\overrightarrow{O_iO_j} = a_{11}\vec{i_i} + a_{12}\vec{j_i} + a_{13}\vec{k_i}$, unde $\vec{i_i}, \vec{j_i}, \vec{k_i}$ sunt vectorii unitari ai sistemului de referință $O_iX_iY_iZ_i$

# Transformări de coordonate

- **Metoda cosinusurilor directoare**

  - **Transformarea vectorilor unitari din sistemul de referință inițial $O_iX_iY_iZ_i$ în noul sistem de referință $O_jX_jY_jZ_j$ se face cu matricea:**

$$\begin{bmatrix} \vec{i_j} \\ \vec{j_j} \\ \vec{k_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i_i} \\ \vec{j_i} \\ \vec{k_i} \end{bmatrix}, \text{ unde}$$

$$\begin{matrix} r_{11} = \cos\alpha_1 & r_{21} = \cos\alpha_2 & r_{31} = \cos\alpha_3 \\ r_{12} = \cos\beta_1 & r_{22} = \cos\beta_2 & r_{32} = \cos\beta_3 \\ r_{13} = \cos\gamma_1 & r_{23} = \cos\gamma_2 & r_{33} = \cos\gamma_3 \end{matrix}$$

  - **Sunt cosinusurile directoare ale unghiurilor formate de fiecare axă a noului sistem în raport cu axele vechiului sistem de referință**

  - **Matricea cosinusurilor directoare transpusă se numește *matricea de rotație* $R_{ij}$, și definește orientarea reperului în raport cu vechea poziție**

# Transformări de coordonate

- **Metoda cosinusurilor directoare**

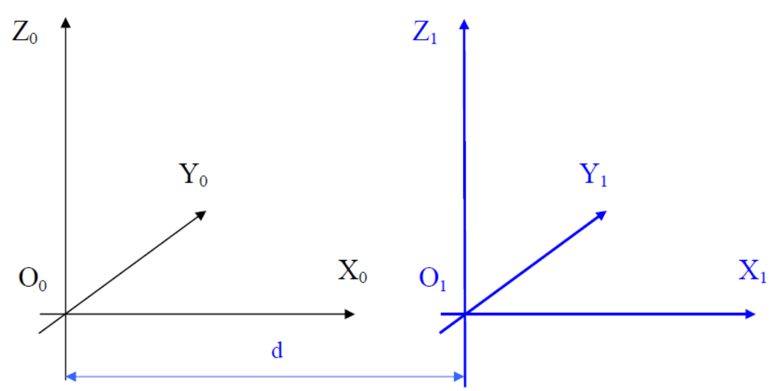
$$R_{ij} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \text{ cu proprietatea: } R_{ij}^{T} = R_{ij}^{-1} = R_{ij}$$

➢ ***Matricea de transformare***, **cu *translație* și *rotație* este de forma:**

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_{11} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_{21} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ unde } T_{ij} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{22} \end{bmatrix} \text{ este matricea de translație}$$

➢ **Exemplu: translație după axa X cu valoarea *d***

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

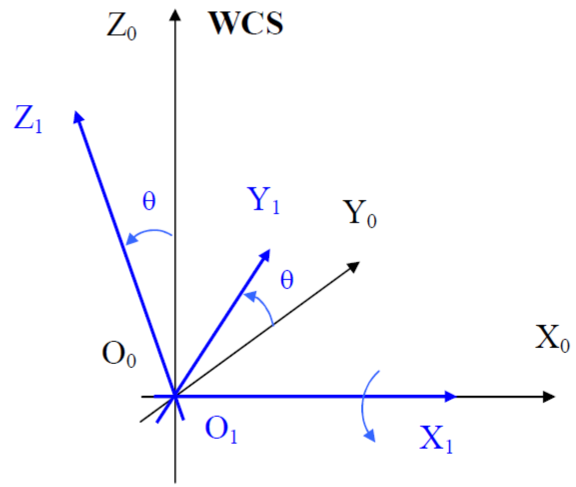


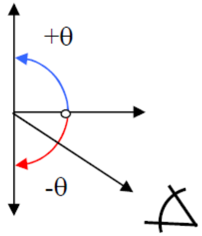
# Transformări de coordonate

- Metoda cosinusurilor directoare

  - **Exemplu: rotație după axa X cu unghiul $\theta$**

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



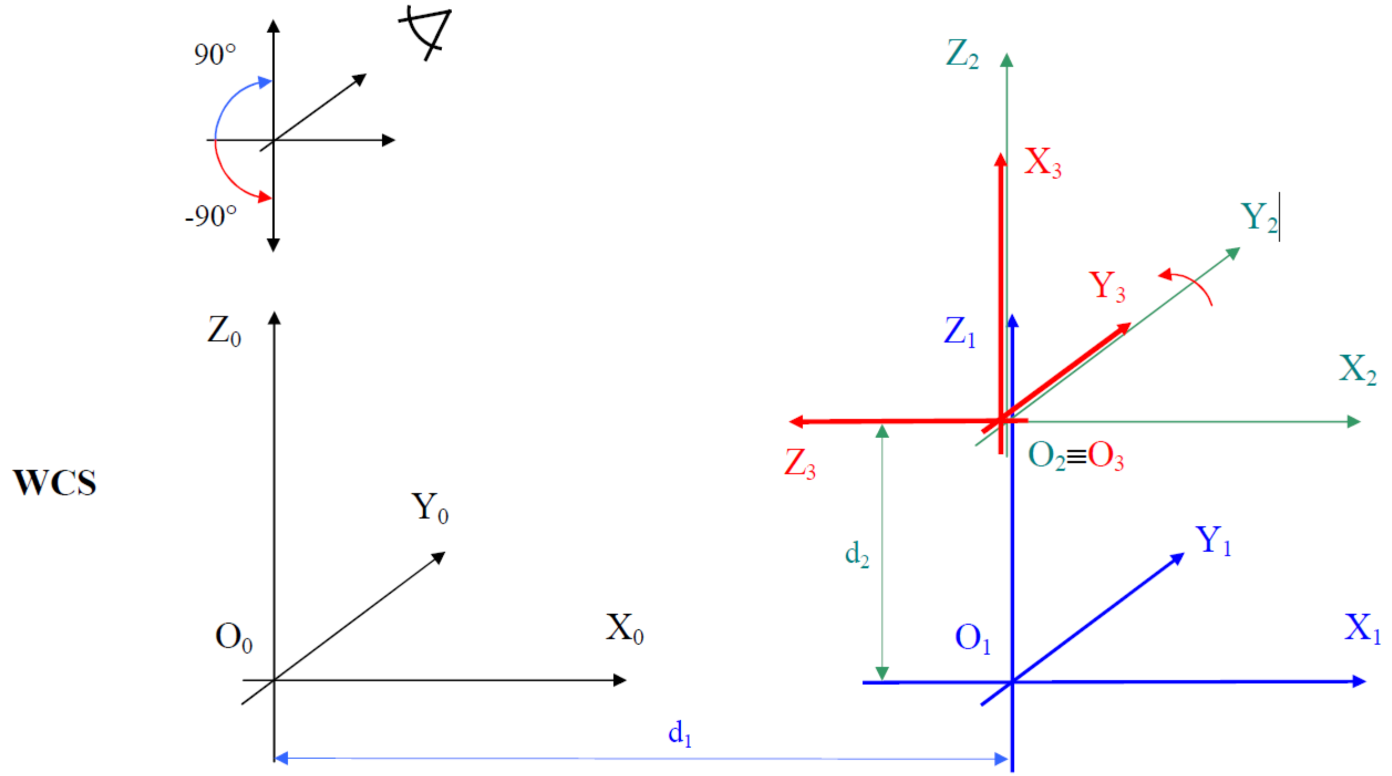

  - **Exemplu: Rotație și translație după aceeași axă:**

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Transformări de coordonate

- **Metoda cosinusurilor directoare**
  - **Exemplu: rotație și translație după axe diferite:**

$$[O_0X_0Y_0Z_0] \xrightarrow[Trans(X_0,d_1)]{} [O_1X_1Y_1Z_1] \xrightarrow[Trans(Z_1,d_2)]{} [O_2X_2Y_2Z_2] \xrightarrow[Rot(Y_2,-90^\circ)]{} [O_3X_3Y_3Z_3]$$

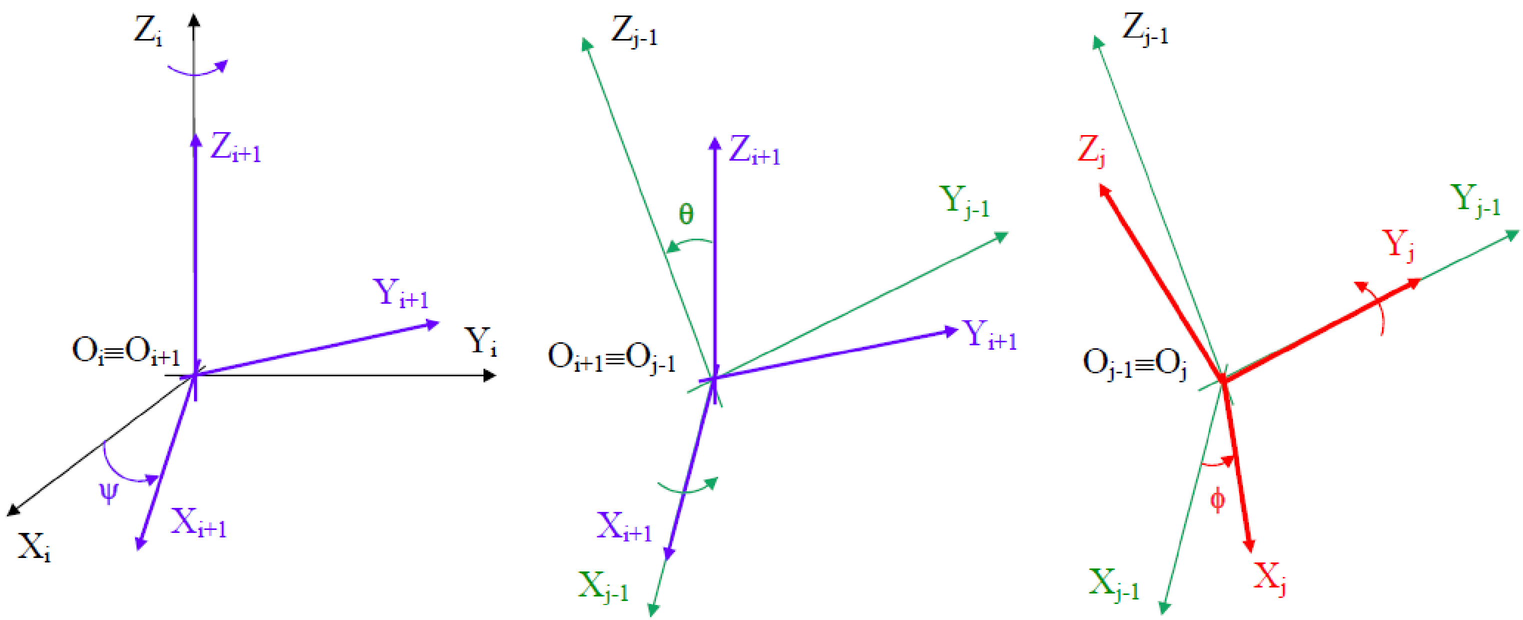


# Transformări de coordonate

- **Metoda unghiurilor Euler**
  - **Poziția axelor noului reper este definită în raport cu vechiul reper în funcție de trei unghiuri rezultate prin trei rotații succesive, astfel:**

$$[O_i X_i Y_i Z_i] \xrightarrow[rotație(Z_i,\Psi)]{} [O_{i+1} X_{i+1} Y_{i+1} Z_{i+1}] \xrightarrow[rotație(X_{i+1},\theta)]{} [O_{j-1} X_{j-1} Y_{j-1} Z_{j-1}]$$

$$\xrightarrow[rotație(Y_{j-1},\phi)]{} [O_j X_j Y_j Z_j]$$



# Transformări de coordonate

- **Metoda unghiurilor Euler**
  - **Matricea de rotație se scrie astfel:**

$$\boldsymbol{R_{ij}} = \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\psi} & -\sin\boldsymbol{\psi} & \mathbf{0} \\ \sin\boldsymbol{\psi} & \cos\boldsymbol{\psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos\boldsymbol{\theta} & -\sin\boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{0} & \sin\boldsymbol{\theta} & \cos\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\phi} & -\sin\boldsymbol{\phi} & \mathbf{0} \\ \sin\boldsymbol{\phi} & \boldsymbol{cos\phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

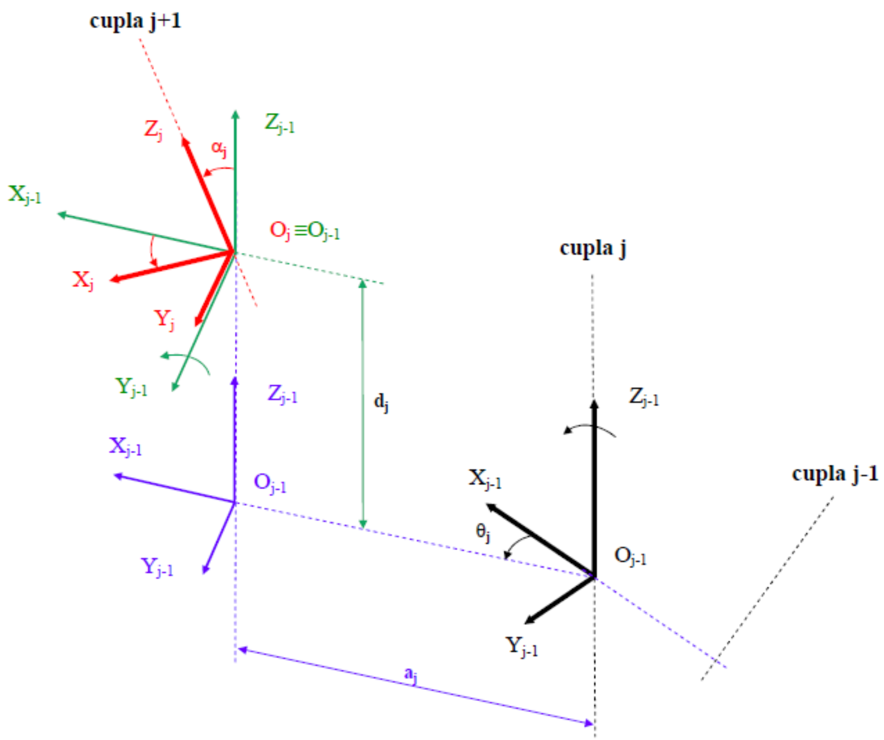
  - **Pentru cazul unei deplasări în spațiu a sistemului $O_jX_jY_jZ_j$ atașat unui corp solid, se determină *matricea de transformare omogenă* (*Euler*) după cum urmează:**

$$\boldsymbol{T_{ij}} = \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\psi}\cos\boldsymbol{\phi} - \sin\boldsymbol{\psi}\cos\boldsymbol{\theta}\sin\boldsymbol{\phi} & -\cos\boldsymbol{\psi}\sin\boldsymbol{\phi} - \sin\boldsymbol{\psi}\cos\boldsymbol{\theta}\sin\boldsymbol{\phi} & \sin\boldsymbol{\psi}\sin\boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{x_i} \\ \sin\boldsymbol{\psi}\cos\boldsymbol{\phi} + \cos\boldsymbol{\psi}\cos\boldsymbol{\theta}\sin\boldsymbol{\phi} & -\sin\boldsymbol{\psi}\sin\boldsymbol{\theta} + \cos\boldsymbol{\psi}\cos\boldsymbol{\theta}\cos\boldsymbol{\phi} & -\cos\boldsymbol{\psi}\sin\boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{y_i} \\ \sin\boldsymbol{\theta}\sin\boldsymbol{\phi} & \sin\boldsymbol{\theta}\cos\boldsymbol{\phi} & \cos\boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{z_i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

# Transformări de coordonate

- **Metoda Denavit–Hartenberg**
  - **Poziția axelor noului reper este definită în raport cu vechiul reper în funcție patru parametrii de poziție $\theta_j, a_j, d_j, \alpha_j$, astfel:**

$$[O_{j-1}X_{j-1}Y_{j-1}Z_{j-1}] \xrightarrow[rot(Z_{j-1},\theta_j)+trans(X_{j-1},a_j)+trans(Z_{j-1},d_j)+rot(X_{j-1},\alpha_j)]{} [O_jX_jY_jZ_j]$$



# Transformări de coordonate

- **Metoda Denavit–Hartenberg**

  - **Matricea de transformare omogenă Denavit-Hartenberg corespunzătoare cuplei de ordin *j* este de forma:**

$$DH_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 & 0 \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j & 0 \\ 0 & \sin\alpha_j & \cos\alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - **Rezultând o matrice de transformare de forma:**

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j\cos\alpha_j & \sin\theta_j\sin\alpha_j & a_j\cos\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j\cos\alpha_j & -\cos\theta_j\sin\alpha_j & a_j\sin\theta_j \\ 0 & \sin\alpha_j & \cos\alpha_j & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


**Contact:**

**Email: gigel.macesanu@unitbv.ro**

**Web: rovis.unitbv.ro**