

5. Sisteme Dinamice în Robotică

Mișcarea unei particule

Pendulul inversat

Modelul unui vehicul

Modelul unei drone

În cele ce urmează, vom studia câteva exemple de sisteme dinamice utilizate cu precădere în robotică.

5.1 Mișcarea unei particule

O particulă având masa m , poziția p , viteza v și controlată prin forța u , respectă legea lui Newton sub forma unui sistem dinamic de ordinul II:

$$\ddot{p} = \frac{u}{m} \quad (5.1)$$

Această problemă poate fi modelată folosind vectorul de stare $x = (p, v) \in \mathbb{R}^2$ și controlul $u = f \in \mathbb{R}^2$, având ecuația dinamică:

$$\dot{x} \equiv \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = f(x, u) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{u}{m} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Funcția f poate fi considerată ca și un câmp vectorial ce mapează fiecare punct 2D la un vector 2D. Dacă ar fi să desenem acest câmp vectorial în planul (p, v) pentru diferite valori ale lui f , am observa în primul rând că acesta este invariant la p . În al doilea rând, valoarea lui f schimbă magnitudinea și direcția vectorilor în direcția lui v .

Pentru orice stare inițială $x_0 = (p_0, v_0)$ supusă unei forțe constante $u(t) = f$, viteza traiectoriei soluție $x(t)$ poate fi determinată prin integrarea:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{f}{m} dt = v_0 + t \frac{f}{m} \quad (5.3)$$

Similar, poziția poate fi determinată prin integrarea vitezei:

$$p(t) = p_0 + \int_0^t v(t) dt = p_0 + \int_0^t \left(v_0 + t \frac{f}{m} \right) dt = p_0 + t v_0 + \frac{1}{2} t^2 \frac{f}{m} \quad (5.4)$$

Acest lucru indică faptul că viteza unei particule crește sau descrește liniar cu timpul,

respectând o funcție având panta f . Poziția particulei pe de altă parte, ia forma unei parabole. Acest model se poate generaliza pentru orice particulă în spațiul n -dimensional, cu diferența că în acest caz poziția, viteza și forța devin cantități vectoriale. Starea este astfel dată de un vector $2n$ -dimensional, respectiv controlul de un vector n -dimensional.

Să presupunem că dorim să mișcăm particula de la o poziție la alta (de exemplu de la 0 la 1), la pornire și la oprire dorind să avem viteza 0. Această problemă poate fi rezolvată prin calculul lui f într-o buclă de control închisă:

$$f(t) \equiv u(x(t)) = -k_P(p-1) - k_D v \quad (5.5)$$

unde k_P și k_D reprezintă valoarea componentelor proporționale și derivative ale algoritmului de control.

5.2 Pendulul inversat

Pendulului inversat este reprezentat de problema prin care un cart este translatat pe direcția x în aşa fel încât să balanzeze o bară (v. Figura 5.1). Această problemă de control este similară problemei de control a platformei Segway.

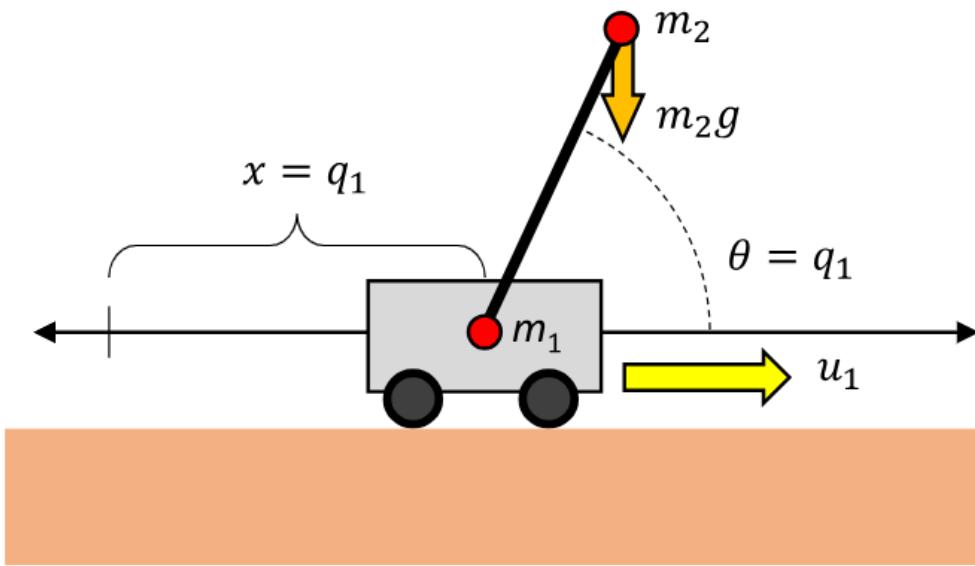


Fig. 5.1 Problema de balansare a unei bare verticale atașată de un cart.

Configurația sistemului are doi parametrii $q = (q_1, q_2)$, ce indică translația cartului pe axa x , respectiv unghiul barei montate pe cart. Unghiul q_2 este măsurat în sens trigonometric. Pentru a balansa bara, dorim să proiectăm un algoritm de control care să mențină starea la punctul de echilibru instabil $q_2 = \frac{\pi}{2}$. Intervalul de variație a lui q_2 este $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Pendulul invers este un sistem dinamic în care motoarele cartului pot aplica forță u_1 atât în direcția negativă, cât și pozitivă a lui x . Optional de poate adăuga cuplul u_2 ca și variabilă de control, însă de obicei $u_2 = 0$. Cartul și bara au masele m_1 și m_2 , bara având masa concentrată la distanța L față de cart.

Ecuatiile dinamice de miscare ale sistemului sunt:

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - \frac{m_2 L}{2}\ddot{q}_2 \sin q_2 - \frac{m_2 L}{2}\dot{q}_2^2 \cos q_2 = u_1 \quad (5.6)$$

$$-\frac{m_2 L}{2}\ddot{q}_1 \sin q_2 + \frac{m_2 L}{4}\ddot{q}_2 \sin q_2 + m_2 g \cos q_2 = u_2 \quad (5.7)$$

unde g este constanta gravitațională. Se poate observa că acceleratiile \ddot{q}_1 și \ddot{q}_2 sunt dependente una de celalaltă, apărând în ambele ecuații. Sistemul de ecuații de mai sus poate fi scris matriceal:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \frac{m_2 L}{4} & \frac{m_2 L}{2} \sin q_2 \\ \frac{m_2 L}{2} \sin q_2 & m_1 + m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + \frac{m_2 L}{2} \dot{q}_2^2 \cos q_2 \\ u_2 - m_2 g \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

unde $d = \frac{m_1 m_2 L^2}{4} + \frac{m_2^2 L^2}{4} \cos^2 q_2$. Ecuația dinamică de mai sus poate fi utilizată pentru obținerea traекторiilor de stare pentru orice u_1 și u_2 .

Sistemul prezentat este foarte sensibil la comportamentul cartului. În Figura 5.2 este prezentată variația balansării pentru mișcări sinusoidale de 1.5rad , având amplitudinea 0.5. Fiecare diagramă are o frecvență diferită de oscilație.

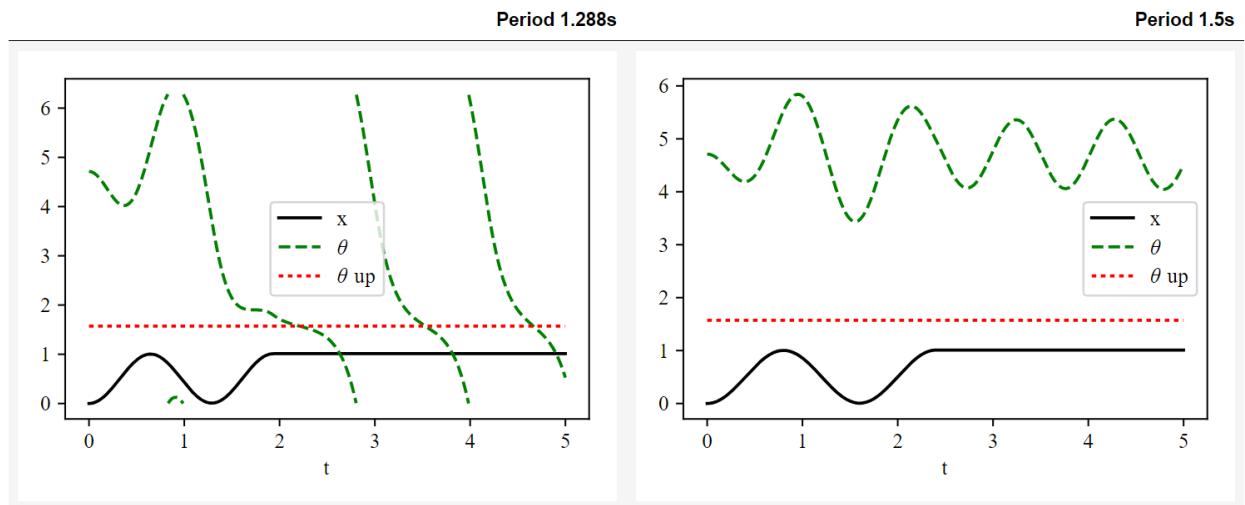


Fig. 5.2 Comportamentul sistemului în funcție de timp. Pendulul nu poate fi stabilizat la poziția verticală dacă cartul este mișcat în intervalul 1.288s până la 1.5s , însă este stabilizat atunci când se folosește frecvență de 1.288 , urmată de o stabilizare la $t = 2$.

5.3 Modelul unui vehicul

Modelul unui vehicul aproximează mișcarea unei platforme mobile cu 2 axe ce se deplasează pe o suprafață plană, ignorând acceleratiile. În acest model, (p_x, p_y) reprezintă centrul axei posterioare, θ este orientarea, iar L distanța dintre axele frontale și posterioare. Vectorul de control $u = (v, \phi)$ specifică viteza v , respectiv unghiul de gidaj ϕ al roților

frontale. Dinamica sistemului este data de:

$$\dot{x} \equiv \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f(x, u) = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \frac{v}{L} \tan \phi \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Se poate observa că viteza este întotdeauna paralelă cu orientarea $(\cos \theta, \sin \theta)$ și că rata de variație a rotației $\dot{\theta}$ depinde atât de unghiul de ghidaj, cât și de viteză. Pentru un u constant, poziția (p_x, p_y) urmează o linie dreaptă ($\phi = 0$) sau un arc de cerc ($\phi \neq 0$).

În practică, valorile variabilelor de control sunt supuse limitelor $v_{min} \leq v \leq v_{max}$ și $|\phi| \leq \phi_{max}$. Cu aceste limite, vehiculul are o rază maximă de rotație $\frac{1}{L \tan \phi_{max}}$. Vehiculul nu se poate mișca în lateral, necesitând manevra de parcare paralelă pentru a se putea mișca în direcția din spațiul stărilor $(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$.

5.4 Modelul unei drone 2D

Zburatul pe loc (hovering) este una din capabilitățile pe care o dronă ar trebui să le aibă. Algoritmii pe care îi vom studia au o aplicabilitate largă în robotică, atât pentru drone cât și pentru alte sisteme, precum balansarea unui robot humanoid.

Vom dezvolta algoritmul de zburat pe loc în doi pași:

- **Dinamica:** determinarea ecuației dinamice ce ne va indica comportamentul dronei atunci când este supusă unui vector de comandă.
- **Controlul:** sinteza unui algoritm de control destinat calcului valorilor vectorului de control, atunci când drona se deplasează din punctul de hovering.

Vom considera modelul simplificat al dronei din Figura 5.3, model ce ia în considerare doar mișcarea unei drone în planul $X - Y$.

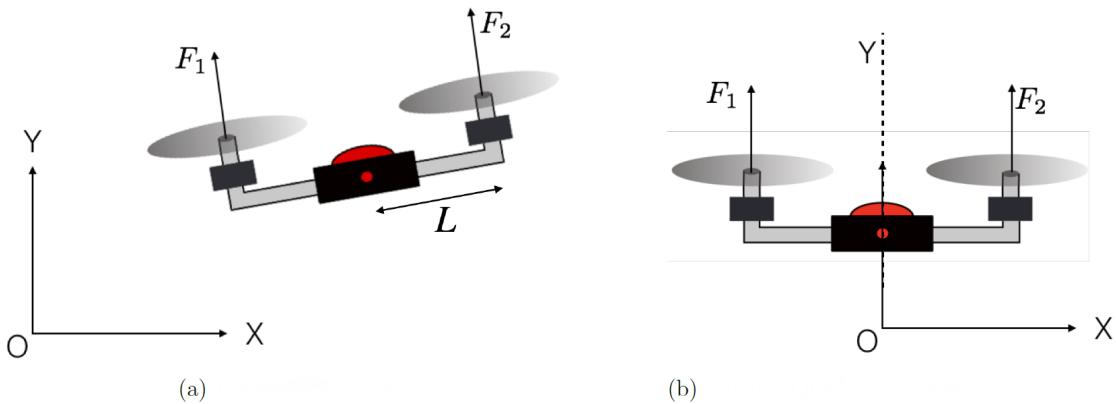


Fig. 5.3 a) Drona 2D în plan. b) Dronă 2D constrânsă să se deplaseze doar pe axa Y .

Pentru început, vom lua în considerare doar mișcarea pe verticală a dronei, aşa cum este ilustrat în Figura 5.3. Astfel, putem descrie starea dronei printr-o singura variabilă de stare, și anume poziția y față de centrul de masă. Acest sistem are un singur *grad de libertate*

(DoF - Degree of Freedom). Gradele de libertate indică numărul de direcții independente în care un sistem se poate deplasa.

Ecuația mișcării sistemului poate fi determinată utilizând a doua lege a lui Newton:

$$m\ddot{y} = F_1 + F_2 - mg \quad (5.10)$$

unde m este masa totală a dronei, iar F_1 și F_2 sunt forțele propulsoare ale elicelor. Accelerarea pe axa Y este dată de:

$$\ddot{y} = \frac{F_1 + F_2}{m} - g \quad (5.11)$$

Dacă notăm forța propulsoare totală cu:

$$u_1 = F_1 + F_2 \quad (5.12)$$

obținem:

$$\ddot{y} = \frac{u_1}{m} - g \quad (5.13)$$

Să considerăm în cele ce urmează drona 2D, care nu mai este constrânsă doar la mișcarea pe axa Y . Acest sistem are 3 grade de libertate, și anume pozițiile pe axele X și Y , respectiv orientarea θ . Utilizând legea a doua a lui Newton, obținem ecuațiile de mișcare:

$$\ddot{x} = -\frac{u_1}{m} \sin \theta \quad (5.14)$$

$$\ddot{y} = \frac{u_1}{m} \cos \theta - g \quad (5.15)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{(F_2 - F_1)L}{I} \quad (5.16)$$

unde u_1 este forța totală propulsoare, I corespunde momentului de inerție al sistemului, iar L este lungimea unui braț al dronei (vezi Figura 5.3). Momentul de inerție este o proprietate fizică a sistemului ce poate fi estimată din geometrie și distribuția masei dronei, sau prin experimente.

Fie momentul total datorat forței propulsoare a elicelor:

$$u_2 = (F_2 - F_1)L \quad (5.17)$$

Ecuațiile de mișcare ale dronei 2D pot fi exprimate ca și:

$$\ddot{x} = -\frac{u_1}{m} \sin \theta \quad (5.18)$$

$$\ddot{y} = \frac{u_1}{m} \cos \theta - g \quad (5.19)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u_2}{I} \quad (5.20)$$

Pentru a putea descrie mișcarea ca și ecuații diferențiale de ordinul I definim:

$$v_x = \dot{x} \quad (5.21)$$

$$v_y = \dot{y} \quad (5.22)$$

$$\omega = \dot{\theta} \quad (5.23)$$

Astfel, ecuațiile de mișcare pot fi astfel rescrise sub forma $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ folosind stările:

$$\dot{x} = v_x \quad (5.24)$$

$$\dot{y} = v_y \quad (5.25)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (5.26)$$

$$\dot{v}_x = \ddot{x} = -\frac{u_1}{m} \sin \theta \quad (5.27)$$

$$\dot{v}_y = \ddot{y} = \frac{u_1}{m} \cos \theta - g \quad (5.28)$$

$$\dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{u_2}{I} \quad (5.29)$$

Starea sistemului este dată de vectorul $\mathbf{x} = [x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}]$. Folosind metoda de integrare, putem trasa traiectoria de stare pornind de la orice stare inițială. Forma matriceală a ecuației dinamice este:

$$\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ -\frac{u_1}{m} \sin \theta \\ \frac{u_1}{m} \cos \theta - g \\ \frac{u_2}{I} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

5.4.1 Modelarea motorului

Până acum am considerat elicele ca și forță propulsoare. În realitate, nu controlăm direct propulsia dronei, ci viteza de rotație a motoarelor. Forța propulsoare este legată de viteza de rotație a motorului prin relația:

$$F = k_f \cdot \omega^2 \quad (5.31)$$

unde ω reprezintă viteza de rotație a motorului, iar k_f reprezintă coeficientul de propulsie. Astfel, drona 2D are 3 parametri fizici: m , I și k_f . Valorile acestor parametri sunt necesare pentru a putea defini modelul dinamic.

5.4.2 Modelul dronei 3D

Orientarea pe cele trei axe ale spațiului Cartezian a unei drone este redată în Figura 5.4. Gradele de libertate ale sistemului sunt în acest caz 6 (3 pentru poziție și 3 pentru orientare). În cele ce urmează vom utiliza unghiurile Euler (ϕ, θ, ψ) în reprezentarea rotației.

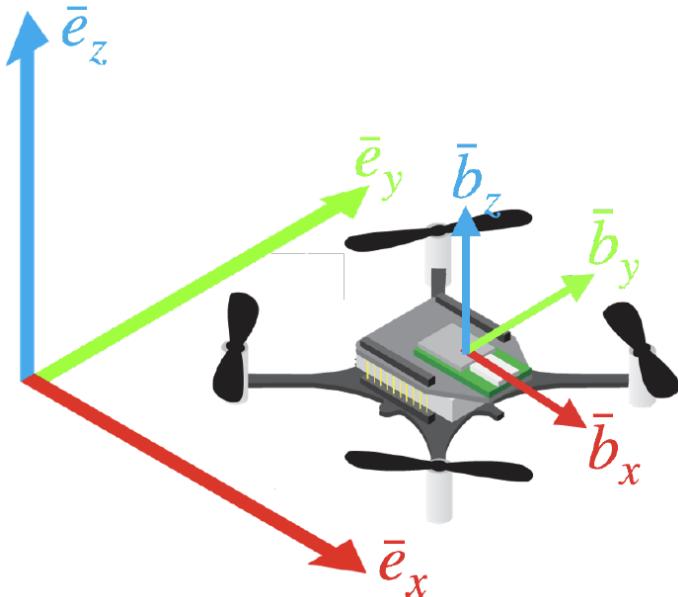


Fig. 5.4 Structura unei drone 3D și sistemul de coordonate.

Starea unei drone în spațiul 3D este dată de vectorul $\mathbf{x} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]$,

unde $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ reprezintă vitezele unghiulare pe cele trei axe de rotație.

Vectorul de control este compus din propulsia dată de cele patru elice:

$$\mathbf{u} = [F_{tot}, M_1, M_2, M_3]^T \quad (5.32)$$

unde $F_{tot} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$, iar M_1, M_2 și M_3 sunt cuplurile pe axele X, Y și Z . Având patru motoare, relația dintre propulsie și viteză unghiulară a motorului devine:

$$F_i = k_f \cdot \omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.33)$$

unde propulsia F_i produsă de motorul i este egală cu coeficientul de propulsie k_f înmulțit cu viteza de rotație a motorului i la pătrat. În spațiul 3D, rotirea elicelor produce propulsie și cuplu. Cuplul este introdus de frecarea aerodinamică (aerodynamic drag), fiind exercitat în direcția axei Z , permitându-i dronei să se rotească pe axa Z .

Cuplul aerodinamic produs de elica i este:

$$M_i^{aero} = k_m \cdot \omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.34)$$

unde k_m este coeficientul de frecare.

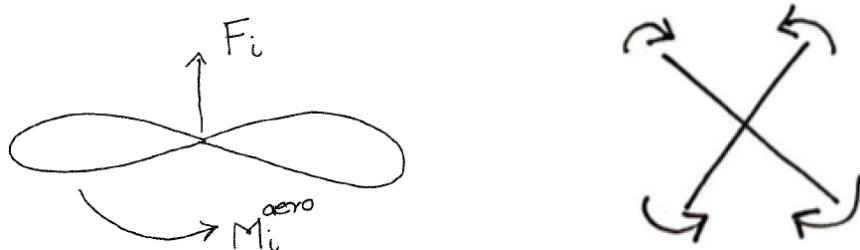


Fig. 5.5 (a) Direcția forței propulsoare și a cuplului aerodinamic de frecare. (b) Direcția de rotație a celor patru motoare ale dronei. Deoarece motoarele se rotesc în direcții opuse unul față de celălalt, și cuplurile pe care le produc sunt în direcții opuse.

5.4.3 Modelul dinamic complet al unei dronei

Așa cum am văzut în cursul trecut, modelul dinamic va avea forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (5.35)$$

Fie vectorul de poziție:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

și vectorul de viteză:

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Utilizând legea a doua a lui Newton, putem obține accelerăția:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F_{tot}}{m} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

unde \mathbf{R} este matricea de rotație ce convertește vectori din sistemul de coordonate al dronei în sistemul de coordonate inerțial W .

Fie:

$$\omega_B^W = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

atunci:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\omega_B^W = \mathbf{I}^{-1} \left[-\omega_B^W \times (\mathbf{I}\omega_B^W) + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \right] \quad (5.41)$$

unde \times este produsul vectorial, iar \mathbf{I} matricea de inerție:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Derivarea ecuațiilor de mai sus poate fi regăsită în [2].

5.4.4 Liniarizarea dinamicii dronei 2D

Dinamica dronei este **neliniară**. Pentru a putea implementa algoritmul de control, vom remodela dinamica utilizând o aproximare liniară.

Dinamica dronei 2D este data de ecuația 5.30. Pentru a aproximarea liniar dinamica,

este necesar un punct nominal (referință) în jurul căruia să efectuăm liniarizarea. În cazul zburatului pe loc, acest punct este:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} mg \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Valoarea de control nominală \mathbf{u}_0 corespunde propulsiei totale mg și a cuplului 0, necesare pentru ca drona să rămână pe loc în zbor.

Putem liniariza $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ în jurul lui \mathbf{x}_0 , \mathbf{u}_0 pentru a obține:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + B(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (5.44)$$

unde matricile A și B sunt constante, având dimensiunile 6×6 și 6×2 pentru drona 2D.

Liniarizarea poate fi calculată folosind dezvoltarea în serie Taylor:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \underbrace{f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}_{=0} + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}_A + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)}_B \quad (5.45)$$

În cazul dronei 2D, matricile A și B sunt:

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial(-\frac{u_1}{m} \sin \theta)}{\partial x} & \frac{\partial(-\frac{u_1}{m} \sin \theta)}{\partial y} & \frac{\partial(-\frac{u_1}{m} \sin \theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial(-\frac{u_1}{m} \sin \theta)}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial(-\frac{u_1}{m} \sin \theta)}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial(-\frac{u_1}{m} \sin \theta)}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial(\frac{u_1}{m} \cos \theta - g)}{\partial x} & \frac{\partial(\frac{u_1}{m} \cos \theta - g)}{\partial y} & \frac{\partial(\frac{u_1}{m} \cos \theta - g)}{\partial \theta} & \frac{\partial(\frac{u_1}{m} \cos \theta - g)}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial(\frac{u_1}{m} \cos \theta - g)}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial(\frac{u_1}{m} \cos \theta - g)}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial(\frac{u_2}{I})}{\partial x} & \frac{\partial(\frac{u_2}{I})}{\partial y} & \frac{\partial(\frac{u_2}{I})}{\partial \theta} & \frac{\partial(\frac{u_2}{I})}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial(\frac{u_2}{I})}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial(\frac{u_2}{I})}{\partial \dot{\theta}} \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} \quad (5.46)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$B = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \dot{x}}{\partial u_1} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial u_1} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial u_1} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial (-\frac{u_1}{m} \sin \theta)}{\partial u_1} & \frac{\partial (-\frac{u_1}{m} \sin \theta)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial (\frac{u_1}{m} \cos \theta - g)}{\partial u_1} & \frac{\partial (\frac{u_1}{m} \cos \theta - g)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial (\frac{u_2}{I})}{\partial u_1} & \frac{\partial (\frac{u_2}{I})}{\partial u_2} \end{array} \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Bibliografie

- [1] K. Hauser, *Robotic Systems*. Illinois, IL, USA: university of illinois urbana-champaign, 2023. [Online]. Available: <https://motion.cs.illinois.edu/RoboticSystems/>
- [2] C. Powers, D. Mellinger and V. Kumar, *Quadrotor Kinematics and Dynamics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2015, pp. 307–328. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-90-481-9707-1_71