4. Dinamica și Controlul

Obiectivul *dinamicii* este studiul modului în care timpul și forța acționează asupra unui mecanism, în timp ce obiectivul *controlului* este studiul felului în care un sistem ar trebui să răspundă la erori și perturbații. Pentru a putea executa mișcarea roboților, este necesar să analizăm în detaliu atât fizica mecanismelor din care este compus un robot, cât și rolul timpului și al vitezei. Chiar și cei mai puternici roboți nu își pot modifica instantaneu viteza, precum nici autovehiculele autonome sau dronele nu pot efectua mișcări laterale.

Metodele de control dezvoltate de-a lungul timpului îi permit unui robot industrial să se miște la o nouă poziție cu o precizie sub un milimetru, iar unui avion să zboare mii de kilometrii și să aterizeze pe o pistă îngustă de câțiva metri. Controlul reprezintă de asemenea o modalitate de studiu a locomoției și reflexelor în sistemele biologice. Atât dinamica cât și controlul sunt domenii avansate de cercetare care au o vechime mai mare de un veac, la care se aduc și în zilele noastre noi contribuții. Deoarece aceste domenii necesită mai mulți ani de studiu, în acest curs vom studia doar câteva concepte fundamentale pentru domeniul de robotică.

4.1 Terminologie

Un *sistem dinamic* este un sistem al cărei stări variază continuu de-a lungul timpului. În acest curs, vom nota cu $x \in \Re^n$ *starea* unui sistem, unde n reprezintă numărul de variabile de stare. Roboții pot aplica forțe, astfel putând *modifica rata de variație a stării* folosind actuatorii lor. Definim *controlul* (control input) ca fiind vectorul $u \in \Re^m$, unde m reprezintă numărul de variabile de control.

Spre exemplu, pentru un robot industrial cu 6 articulații, starea robotului este de obicei modelată ca și $x = (q, v) \in \Re^{12}$, unde q reprezintă vectorul unghiurilor celor 6 motoare ale robotului, iar v vitezele unghiulare ale acestora. Prin includerea termenului de viteză v, putem modela felul prin care momentul robotului influențează mișcarea viitoare a acestuia, și cum forțele articulațiilor influențează vitezele. Variabila de control u poate avea mai multe forme, în funcție de tipul controlului. De exemplu, dacă algoritmul de control al motoarelor primește la intrare vitezele dorite ale articulațiilor, atunci variabila de control este $u = (v_{d_1}, ..., v_{d_6})$, unde v_{d_i} indică viteza dorită a articulației i. Pe de altă parte, dacă algoritmul de control al motoarelor primește la intrare cuplurile dorite ale articulațiilor, atunci variabila de control este $u = (\tau_1, ..., \tau_6)$.

Terminologia standard utilizată în modelarea unui sistem dinamic este o funcție ce exprimă starea și controlul față de derivata stării. În cazul în care nu avem posibilitatea să controlăm un sistem, atunci *ecuația sistemului dinamic necontrolat* are forma:

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.1}$$

În cazul în care un sistem poate fi totuși controlat printr-o variabilă de control u, *ecuația sistemului dinamic controlat* este:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{4.2}$$

unde x este starea, u este controlul, iar $\dot{x}$ este derivata stării față de timp $\frac{dx}{dt}$. Funcția f este cunoscută ca și dinamica sistemului, iar aceste ecuații ca și *ecuații de mișcare*, în care x și u sunt funcții de timp. Pentru a exprima această dependeță, variabilele pot fi notate ca $x(t)$ și $u(t)$.

4.1.1 Controlul în buclă deshisă și în buclă închisă

Dându-se o funcție f ce exprimă dinamica unui sistem, obiectivul nostru este de a calcula valoarea unei variabile de control u prin care sistemul va îndeplini o anumită sarcină. Există două modalități principale de control:

1. controlul în buclă deschisă, unde $u \equiv u(t)$ depinde doar de timp;

2. controlul în buclă închisă, caz în care $u \equiv u(x, t)$ depinde de stare și de timp.

În controlul în buclă închisă, funcția de control poate observa starea sistemului, schimbând apoi valoarea variabilei de control u în așa fel încât să se îndeplinească o anumită sarcină.

4.1.2 Sisteme discrete în timp

În multe cazuri, putem reprezenta sistemele sub formă discretă, unde timpul nu mai este o variabilă continuă, ci o cantitate discretă $t = 0, 1, 2, ...$, iar funcția de dinamică ia forma:

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) \tag{4.3}$$

În acest caz, variabila de control se modifică doar la anumite puncte discrete pe axa timpului, iar starea este și ea observată la anumite puncte discrete în timp. Această funcție caracterizează mai bine sistemele de control digitale ce operează la frecvențe de eșantionare impuse. Cu toate acestea, în foarte multe situații, frecvența de control este atât de ridicată, încât în practică se poate utiliza direct modelarea sub formă continuă.

4.1.3 Conversia sistemelor dinamice de grad înalt la sisteme de ordinul I

Există multe situații în care vom întâlnii sisteme de forma:

$$\ddot{x} = f(x, \ddot{x}, u) \tag{4.4}$$

care fac legătura dintre starea și valoarea de control cu accelerațiile $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Această ecuație nu se încadrează în definiția unui sistem dinamic dată mai sus, în care nu există nicio derivată de ordin doi. Cu toate acestea, sistemul poate fi aproximat printr-un sistem de ordinul I, folosind un vector de stare:

$$y \equiv \begin{bmatrix} x \\ \ddot{x} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

În următoarea fază, se rescrie ecuația 4.4 folosind expresia unui sistem de ordinul I:

$$\dot{y} = g(y, u) \tag{4.6}$$

unde $g(y, u) \equiv f(x, \ddot{x}, u)$. Aceeași metodă poate fi aplicată și sistemelor de ordin III sau mai mari, unde toate derivatele sunt combinate într-un singur vector.

Este important de remarcat aici, că pentru a defini starea inițială y_0, trebuiesc definite poziția inițială x_0 și viteza inițială $\dot{x}_0$.

4.2 Integrarea prin ecuații diferențiale de ordinul I

Fie un sistem dinamic continuu în timp $\dot{x} = f(x, u)$, unde $x \in \Re^n$ și $u \in \Re^m$. Dându-se la momentul $t = 0$ o stare inițială x_0 și un control $u(x, t)$, definit pentru $t \geq 0$. Rezolvarea *traiectoriei de stare* reprezintă rezolvarea unei probleme cu o valoare inițială dată pentru un sistem de Ecuații Diferențiale de Ordinul I (ODE - Ordinary Differential Equation):

$$\text{Găsește } x(t) \text{ pentru } t > 0, \text{ unde } \dot{x}(t) = g(x(t), t) \text{ și } x(0) = x_0 \tag{4.7}$$

unde $g(x, t) \equiv f(x, u(x, t))$ este o funcție dinamică ce variază în timp.

4.2.1 Metoda Euler

Pentru anumite clase de sisteme dinamice, vom vedea că ecuațiile diferențiale de ordinul I pot fi rezolvate analitic. Cu toate acestea, în cazul general, vom folosi metode numerice pentru rezolvarea acestor ecuații. În acest context, problema este de integrare a ecuațiilor diferențiale de ordin I (ODE integration), denumită și simulare.

Cea mai simplă metodă de integrare numerică este *metoda Euler*, care împarte timpul într-o secvență de mici pași Δt, pași în care se presupune că dinamica este constantă. Fiecare mișcare consecutivă deplasează starea folosind aproximarea de ordinul I $\Delta t \cdot g(x(t), t)$. Rezultatul este o secvență de stări $x_0, ..., x_N$:

$$x_1 = x_0 + \Delta t \cdot g(x_0, \Delta t \cdot 0) \tag{4.8}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta t \cdot g(x_1, \Delta t \cdot 1) \tag{4.9}$$

...

$$x_N = x_{N-1} + \Delta t \cdot g(x_{N-1}, \Delta t \cdot (N-1)) \tag{4.10}$$

```python
import numpy as np

def integrate_euler(f,x0,N,dt,t0=0):
    """Metoda Euler pentru aproximarea traiectoriei, dandu-se problema x'=f(x,t)

    Arguments:
    - f(x,t): o functie de stare si timp, ce exprima derivata dx
    - x0: starea initiala la timpul t0, x(t0)=x0
    - N: numarul de pasi
    - t0: timpul initial

    Return value: traiectoria ([t0,t1,...,tN],[x0,x1,...,xN])
    """
    t = t0
    x = x0
    ts = [t0]
    xs = [x0]
    for i in range(N):
        dx = f(x,t)
        x = x + dt*dx
        t = t + dt
        ts.append(t)
        xs.append(x)
    return (ts,xs)
```

Figura 4.1 ilustrează traiectoria unei particule 2D sub un câmp gravitațional, dânsu-se controlul u ca și accelerație gravitațională.

Se poate observa că precizia integrării depinde mult de magnitudinea pasului de timp ales. Cu cât pasul este mai mic, cu atât integrarea va fi mai precisă. Eroarea de integrare

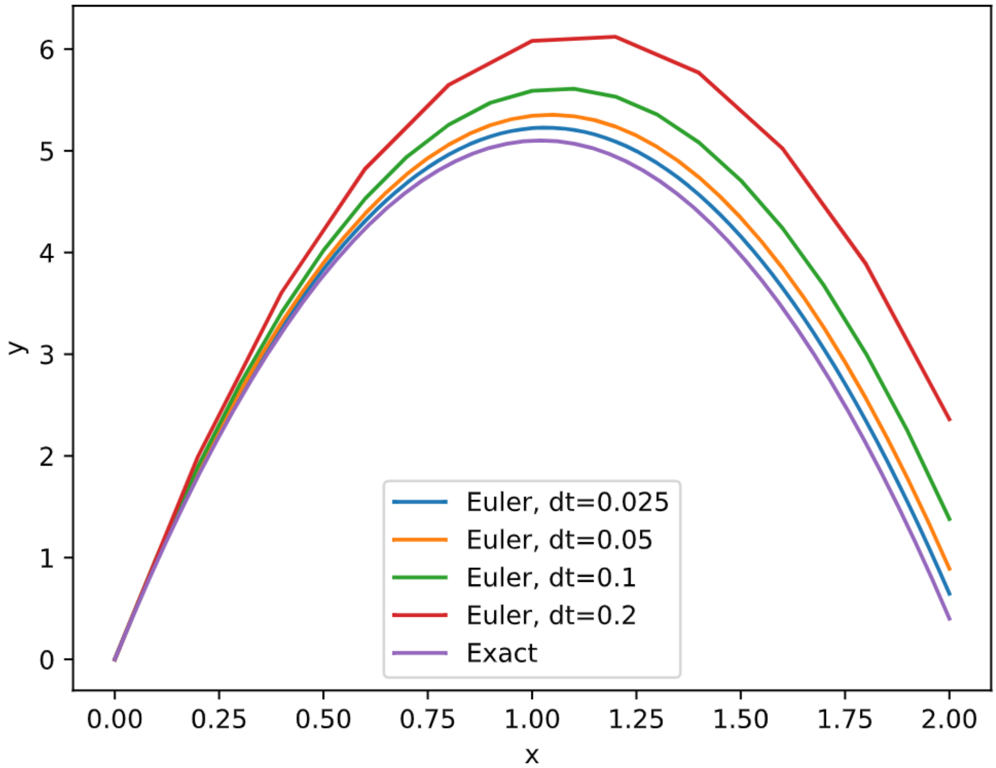

Fig. 4.1 Traiectoria unei particule 2D calculată prin metoda Euler.

este dată de $\epsilon = x(t) - x_{t/\Delta t}$. Erori mari de integrare rezultă dacă:

- variația spațială a funcției de dinamică este mare. Astfel, eroarea va crește dacă Jacobianul lui f este mare.
- timpul t este mare (eroarea în general crește cu trecerea timpului).
- Δt este mare.

4.2.2 Integrarea prin aproximări de ordin superior

Metodele de integrare ODE ce folosesc aproximarea funcției dinamice prin polinoame Taylor de ordin mai mare de I, returnează erori mai mici în comparație cu integrarea Euler. O clasă des întâlnită de astfel de metode sunt metodele **Runge-Kutta**, care folosesc evaluări multiple ale funcției dinamice pentru a aproxima mai bine dinamica.

4.2.3 Stabilitatea, convergența, divergența

Un sistem dinamic se spune că este:

- **Stabil** pentru o anumită clasă de stări inițiale, dacă soluția traiectoriei de stare nu crește în afara unei anumite limite.
- **Instabil** (sau **divergent**), dacă traiectoria de stare se deplasează în afara unei anumite limite.
- **Convergent** dacă soluția traiectoriilor se apropie de un singur punct.

Un *punct stabil* este o stare x, în așa fel încât pentru o anumită vecinatate a lui x, integrarea ODE converge către x. O condiție necesară pentru ca un punct să fie stabil este ca acesta să fie un *punct de echilibru*.

Punct de echilibru. Pentru un sistem dinamic continuu în domeniul timpului, avem o stare x în așa fel încât $\dot{x} = f(x) = 0$. Pentru un sistem dinamic discret în domeniul timpului, o stare x statisface relația $x = f(x)$. Nu este posibil să avem un punct fix $\mathbf{x}$ în care $\dot{x} \neq 0$.

Toate punctele stabile sunt și de echilibru, însă reciproca nu este adevărată. De exemplu, pentru sistemul $\dot{x} = x$, $x = 0$ este un punct de echilibru, însă nu este stabil. Integrând, se poate observa că $x(t) = ce^t$ este soluția pentru ecuația diferențială. Astfel, o mică perturbație $x(0) = \epsilon$ implică traiectoria soluție $x(t) = \epsilon e^t$, ce va crește fără limită pe măsură ce t crește.

Traiectoriile obținute prin integrarea Euler pot fi divergente chiar și atunci când sistemul dinamic este stabil (sau convergent). Să considerăm exemplul unui oscilator armonic amortizat:

$$\ddot{x} = -10x - \dot{x} \tag{4.11}$$

unde condiția inițială este $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, soluția traiectoriei este $x(t) = e^{-t/2}\cos(\omega t)$, iar $\omega = \sqrt{10 - \frac{1}{2^2}}$. Figura 4.2 ilustrează rezultatul integrării cu metoda Euler pentru diferiți pași dt.

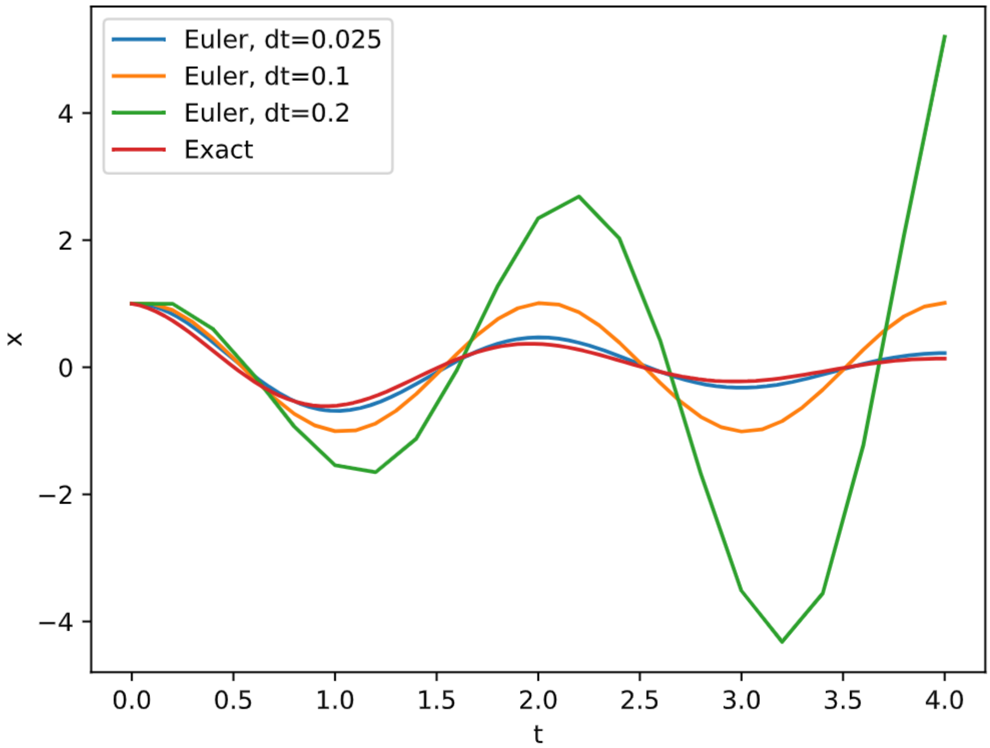

Fig. 4.2 Integrarea Euler pentru diferiți pași dt.

Când pasul de timp dt este mic, traiectoria integrată converge într-adevăr către 0, precum soluția exactă. Cu toate acestea, pentru $\Delta t = 0.1$, soluția oscilează între $[-1, 1]$ și nu converge niciodată. Pentru $\Delta t = 0.2$ soluția explodează către infinit. Aceasta este o problemă în simulare, deoarece dorim să efectuăm calculele rapid fără pași foarte mici, însă și precis.

Există sisteme dinamice stabile în orice punct, pentru care însă metoda Euler este instabilă. Un astfel de exemplu este oscilatorul:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

În acest caz vectorul de direcție într-un punct este întotdeauna perpendicular și în sens trigonometric față de vectorul ce unește originea la punctul respectiv. Traiectoriile soluție, ilustrate în Figura 4.3, sunt cercuri $(r\cos(t-\theta), r\sin(t-\theta))$, unde (r,θ) sunt coordonate polare ale punctului inițial. Dacă am aproxima acest sistem folosind integrarea Euler, fiecare pas de integrare ar duce starea mai departe față de origine, formând o spirală ce se va prelungi în exterior fără limită.

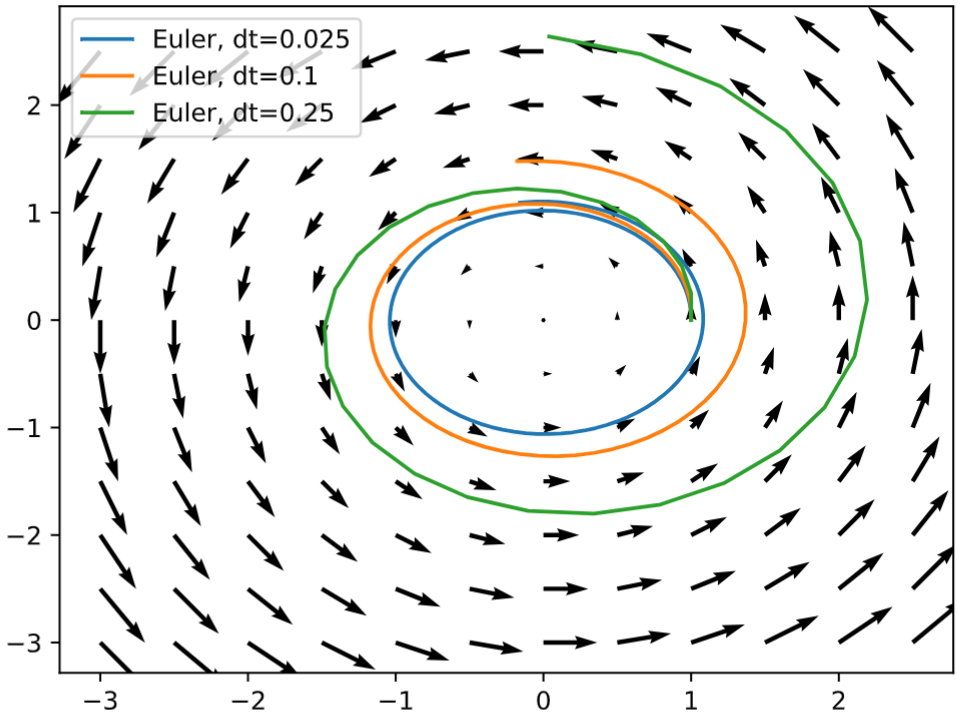

Fig. 4.3 Traiectorii soluție în planul fazelor.

4.2.4 Stabilitatea in sensul Lyapunov

Fie legea de reglare $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. **Sistemul în buclă închisă (closed-loop)** este sistemul pe care îl obținem atunci când folosim această lege de reglare. Dinamica întregului sistem în buclă închisă este dată de:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) = f_{cl}(\mathbf{x}) \tag{4.13}$$

Una dintre proprietățiile pe care le-am dori ca f_{cl} să le aibă este stabilitatea.

Stabilitatea în sensul Lyapunov: Un sistem este stabil în sensul Lyapunov față de un punct fix x_0, dacă pentru oricare $\epsilon > 0$, există u $\delta = \delta(\epsilon)$, în așa fel încât:

$$||\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0|| < \delta \Rightarrow ||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0|| < \epsilon, \forall t \geq 0 \tag{4.14}$$

Stabilitatea asimptotică globală: Un sistem este global asimptotic stabil dacă *i*) este stabil în sens Lyapunov și *ii*) pentru orice condiție inițială (stare inițială) $\mathbf{x}(0)$ se respectă relația:

$$\lim_{t \to \infty} ||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0|| = 0 \tag{4.15}$$

unde $\mathbf{x}(t)$ este starea la momentul de timp t, când sistemul pornește la $\mathbf{x}(0)$, iar $\mathbf{x}_0$ este starea dorită (punctul fix). Dacă această condiție este respectată, se poate spune că sistemul este asimptotic stabil la $\mathbf{x}_0$.

Figura 4.4 ilustrează stabilitatea asimptotică pentru un sistem descris prin două stări $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$.

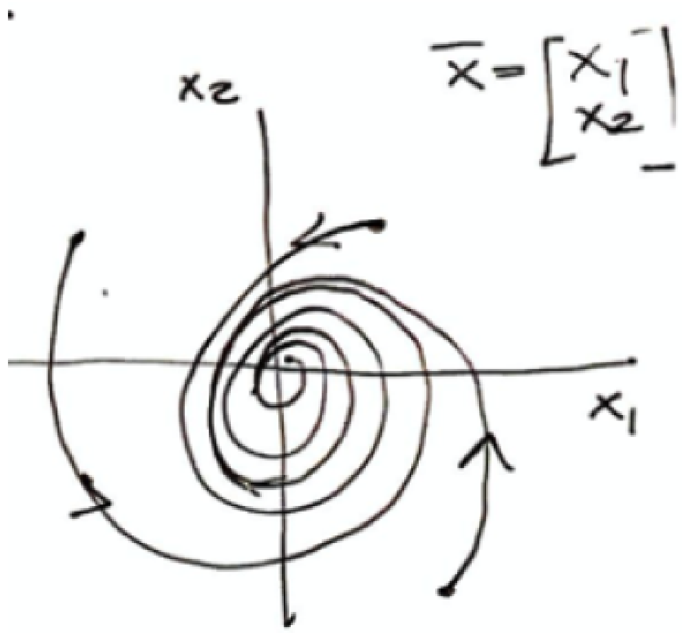

Fig. 4.4 Sistem stabil global.

Conceptul de stabilitate asimptotică introdus mai sus se referă la stabilitatea asimptotică **globală**. Aceasta este o condiție foarte puternică, fiind probabil imposibilă de realizat în practică. În cazul unei drone, condiția impune ca starea să se deplaseze în $\mathbf{x}_0$, indiferent de starea inițială (care poate fi de exemplu $0.99\times$ viteza luminii).

Stabilitatea asimptotică locală: Un sistem este local asimptotic stabil dacă *i*) este stabil în sens Lyapunov și *ii*) pentru orice condiție inițială (stare inițială) $\mathbf{x}(0)$ cu $||\mathbf{x}(0) -$

$\mathbf{x}_0|| \leq R$ pentru un R dat (orice condiție inițială dintr-o sferă de rază R), se respectă condiția:

$$\lim_{t\to\infty} ||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0|| = 0 \tag{4.16}$$

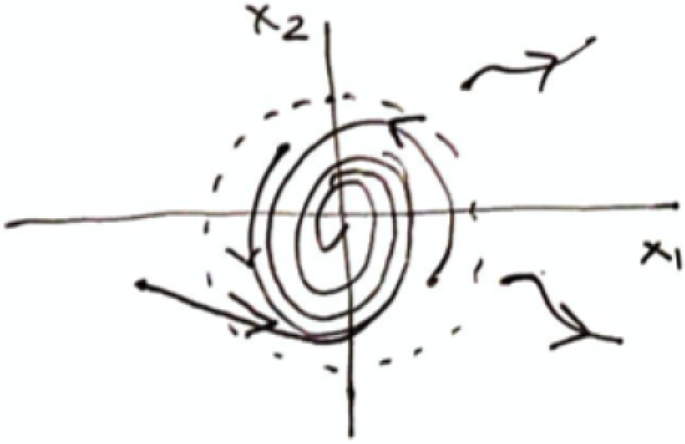

Fig. 4.5 Sistem stabil local.

Stabilitatea asimptotică globală implică stabilitatea asimptotică locală. În cazul sistemelor **liniare** de forma $\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+B(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)$, stabilitatea asimptotică locală implică stabilitatea asimptotică globală. Acest lucru **nu** este valabil pentru sistemele neliniare.

Stabilitatea față de un punct fix $\mathbf{x}_0$: Orice stare inițială poate fi asimptotic modificată către $\mathbf{x}_0$ prin alegerea potrivită a variabilei de control $\mathbf{u}$, pentru orice stare inițială $\mathbf{x}(0)$.

Nu orice sistem (nici măcar liniar) nu este neapărat stabil. Cu toate acestea, stabilitatea sistemelor liniare de tipul $\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+B(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)$ poate fi verificată prin analiza valorilor proprii ale matricilor A și B.

Bibliografie

[1] K. Hauser, *Robotic Systems*. Illinois, IL, USA: university of illinois urbana-champaign, 2023. [Online]. Available: https://motion.cs.illinois.edu/RoboticSystems/

[2] C. Powers, D. Mellinger and V. Kumar, *Quadrotor Kinematics and Dynamics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2015, pp. 307–328. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-90-481-9707-1_71