

3. Rotații 3D

Spații topologice
Matrici de rotație 3D
Unghiuri Euler
Reprezentarea axă-unghi
Quaternioni

Cu toate că în cursul precedent am învățat că rotațiile din grupul $SO(3)$ pot fi definite prin matrici 3×3 , această reprezentare nu este întotdeauna cea mai convenabilă. Există un număr de reprezentări alternative ale rotației, frecvent utilizate în robotică, aviație, CAD, vedere artificială, sau grafică asistată de calculator. Cu toate că $SO(3)$ este un spațiu 3-dimensional, acesta este fundamental diferit de spațiul Cartezian în sens *topologic*, însemnând că elementele din spațiul de rotație nu sunt ”conectate” în același fel prin care sunt conectate punctele în spațiul Cartezian. În cele ce urmează, vom discuta în detaliu forma matricilor de rotație, și de asemenea reprezentările folosind unghiuri Euler, axă-aliniată și quaternioni.

Fiecare reprezentare este în general echivalentă, din moment ce fiecare din acestea pot fi mapate la o transformare de rotație. Cu toate acestea, anumite reprezentări sunt mai convenabile pentru anumite operații, precum inversarea, compunerea, interpolarea sau eșantionarea. Vom discuta de asemenea cum putem descrie rata continuă de schimbare a rotației și cum putem calcula derivatele acesteia.

3.1 Introducere în topologie: rotații în 2D

Pe lângă faptul că este relativ dificil să vizualizăm rotațiile 3D în comparație cu translațiile, rotațiile se comportă fundamental diferit față de translații. Pentru o mai bună înțelegere a rotațiilor, vom introduce câteva concepte de *topologie*, o ramură a matematicii utilizată pentru studiul modului prin care spațiile sunt conectate. Proprietățile topologice de conectivitate sunt păstrate sub transformări arbitrare inversabile, fiind astfel caracteristici fundamentale ale spațiilor și nu doar simple reprezentări de coordonate.

Vom introduce concepte topologice pentru spațiul de rotații 2D $SO(2)$. O particularitate a rotațiilor 2D este faptul că unghiurile se ”încovoiesc”, în așa fel încât direcția 0° este identică cu 360° , respectiv cu multiplicarea acestora. Acesta este o particularitate importantă în mai multe contexte:

- Pentru ca un robot să își modifice orientarea de la 30° la 330° , este mai rapid ca acesta să se rotească cu 60° în sens anti-trigonometric, decât cu 300° în sens trigonometric.
- Dacă o articulație se rotește cu peste 360° , atunci poziția sa va fi exprimată ca și o valoare modulo 360° .
- Când se calculează valori indexate de un unghi, trebuie avut grijă ca cel mai apropiat unghi să fie calculat ca și deviație absolută față de 360° , în locul unei diferențe absolute.

Cu toate că există o mapare unu-la-unu între fiecare element al $SO(2)$ și un unghi în intervalul $[0, 2\pi)$, problema de "încovoiere" demonstrează că $SO(2)$ nu este echivalent fundamental cu spațiul Cartezian, deoarece elementele din $SO(2)$ nu se comportă ca și numere în intervalul dat (vezi Figura 3.1).

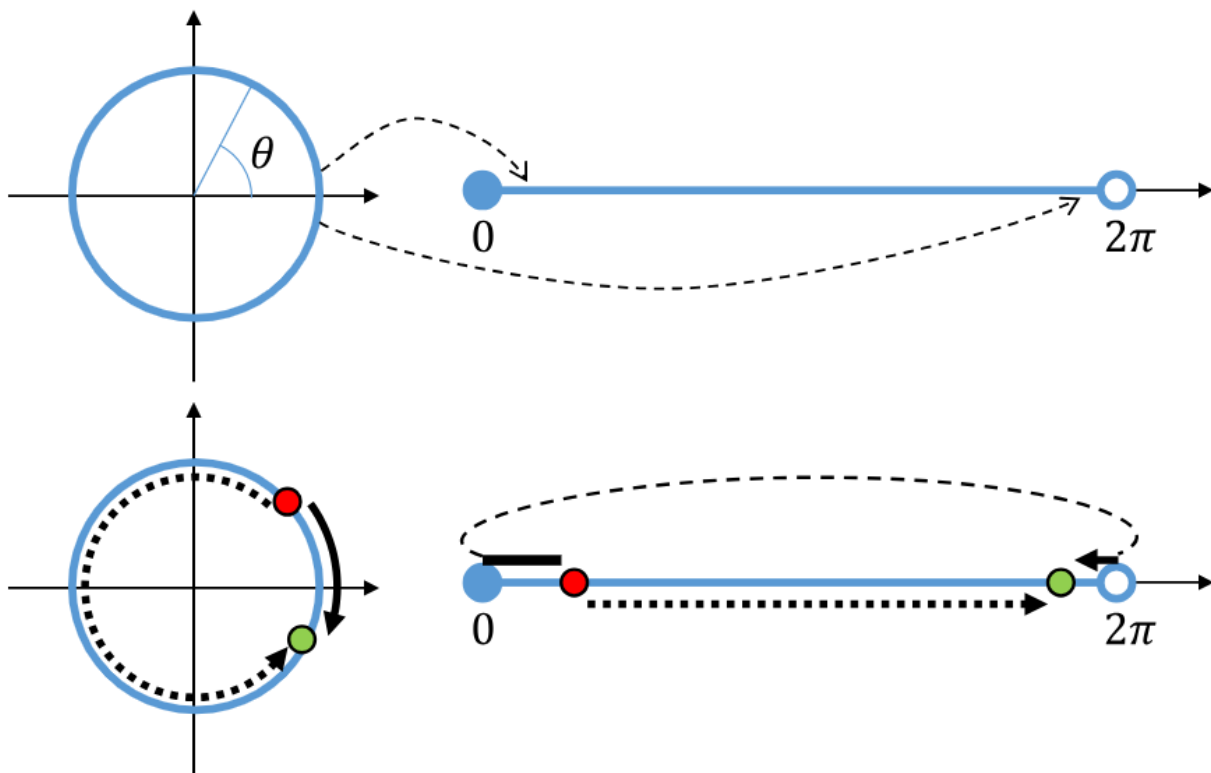


Fig. 3.1 (sus) Topologia spațiului de rotații 2D este homeomorfic la un cerc. (jos) Cea mai scurtă cale dintre două puncte de pe cerc (linia plină) se încovoie la 2π , această valoare fiind o discontinuitate pe interval. Cea mai scurtă cale continuă (linia punctată) este mai lungă pe cerc.

3.1.1 Concepte de bază în topologie

Topologia unui spațiu descrie conectivitatea punctelor din acest spațiu. Conectivitatea este descrisă prin căi, care într-un spațiu \mathbb{X} este descrisă ca și o funcție continuă $x(s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$. Două spații sunt topologic echivalente dacă între ele există o funcție bijectivă ce păstrează conectivitatea căilor. O astfel de funcție bijectivă este denumită *homeomorfism*, iar spațiul topologic echivalent este denumit *homeomorfic*. Dacă nu există o astfel de funcție bijectivă, atunci cele două spații sunt spații topologice distincte (nu sunt homeomorfe).

Din moment ce orice mapare dintre $SO(2)$ și $[0, 2\pi)$ distruge continuitatea căilor ce trec prin unghiul 0, aceste două spații sunt topologic distincte. Totuși, se poate demonstra că $SO(2)$ este homeomorfic față de cercul unitate S_1 . Funcția ce mapează un unghi θ de punctul $(\cos \theta, \sin \theta)$ de pe cerc (vectorul de direcție având orientarea θ) este bijectivă. Maparea inversă este o operație cunoscută ca și *argumentul* punctului și este similar cu $\tan^{-1}(\frac{y}{x})$, însă respectă cadranul fiecărui punct (x, y) și rezolvă și cazul când $x = 0$ (în multe limbaje de programare acest calcul este dat de subrutina $\text{atan2}(y, x)$). Se poate demonstra că această funcție bijectivă păstrează continuitatea căilor atât prin $SO(2)$, cât și prin S_1 : căi continue în $SO(2)$ se mapează la căi continue în S_1 și vice-versa, chiar dacă trec prin unghiul 0.

Ca și rezultat, mișcarea de rotație este fundamental similară cu mișcarea pe un cerc. Când se calculează interpolarea dintre două unghiuri, de obicei se dorește cea mai scurtă cale (distanță) dintre aceste două unghiuri. Interpolarea în mișcarea de rotație necesită fie specificarea direcției de rotație, sau examinarea distanței minime traversate atât în sens trigonometric, cât și în sens anti-trigonometric.

3.1.2 Distanțe geodezice și interpolarea

Calea dintre două puncte în spațiu ce are distanța minimă este denumită *geodezică*. Distanțele geodezice sunt cele mai scurte rute între două puncte dintr-un spațiu, în spațiul Cartezian acestea fiind linii drepte. Distanța geodezică dată de funcția $d(x_1, x_2)$, unde x_1 și x_2 sunt două puncte în spațiu. În general în spații topologice, distanța geodezică este dificil de calculat, însă pentru cazurile $SO(2)$ și $SO(3)$ există soluții.

Distanța unghiulară dintre două unghiuri θ_1 și θ_2 , definită în intervalul $[0, 2\pi)$, este dată de funcția:

$$\text{diff}(\theta_2, \theta_1) = \begin{cases} \theta_2 - \theta_1 & \text{if } -\pi < \theta_2 - \theta_1 \leq \pi \\ \theta_2 - \theta_1 - 2\pi & \text{if } \theta_2 - \theta_1 > \pi \\ \theta_2 - \theta_1 + 2\pi & \text{if } \theta_2 - \theta_1 \leq -\pi \end{cases} \quad (3.1)$$

care are ca rezultat o valoare în intervalul $(-\pi, \pi]$, ce produce o deplasare unghiulară minimă de la θ_2 la θ_1 , pozitivă în sens trigonometric și negativă în sens anti-trigonometric.

Distanța geodezică între două unghiuri este o interpolare între distanța unghiulară:

$$\theta(s) = (\theta_1 + s \cdot \text{diff}(\theta_2, \theta_1)) \pmod{2\pi} \quad (3.2)$$

Distanța geodezică în $SO(2)$ este distanța unghiulară absolută, care este pur și simplu distanța absolută cu semn:

$$d(\theta_1, \theta_2) = |\text{diff}(\theta_2, \theta_1)| \quad (3.3)$$

3.2 Reprezentarea elementelor unui spațiu topologic

Cele mai întâlnite spații topologice pe care le utilizăm în robotică sunt:

- \mathfrak{R}^n : spațiul Cartezian n -dimensional.
- $SO(n)$: grupul special ortogonal n -dimensional. Acesta este definit ca și mulțimea de matrici ortogonale $n \times n$, ce au determinantul $+1$. Așa cum am observat anterior, $SO(2)$ este spațiul rotațiilor 2D, iar $SO(3)$ spațiul rotațiilor 3D.
- $SE(n)$: grupul special Euclidian n -dimensional. Acesta este mulțimea de transformări rigide de dimensiune n și este echivalent cu $SO(n) \times \mathfrak{R}^n$.
- S_n : sfera n -dimensională. S_1 este cercul, iar S_2 sfera standard. Este important de menționat că acest spațiu descrie suprafața sferei.

În cele ce urmează vom considera un exemplu ilustrativ pentru problemele ce apar în reprezentarea rotațiilor 3D. Coordonatele unui punct pe sfera unitate sunt date de latitudine și longitudine (coordonate sferice):

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

unde $\theta \in [0, 2\pi)$ este longitudinea, iar $\phi \in [-\pi/2, \pi/2)$ este latitudinea.

Din moment ce orice punct pe o sferă poate fi reprezentat printr-o pereche (θ, ϕ) , dimensionalitatea lui S_2 este maxim 2. Cu toate acestea, există două singularități, și anume pentru polul nord $(0, 0, 1)$ și polul sud $(0, 0, -1)$, unde fiecare punct pe sferă are un număr infinit de reprezentări 2D: $\mathbf{x}(\theta, \pi/2) = (0, 0, 1)$, respectiv $\mathbf{x}(\theta, -\pi/2) = (0, 0, -1)$.

Această neliniaritate ne indică faptul că atunci când punctul se apropie de poli, atunci reprezentarea punctului variază foarte mult. Dacă $\mathbf{x} = (x, y, z)$, atunci conversia la latitudine/longitudine este dată de relațiile $\phi = \sin^{-1} z$ și $\theta = \text{atan2}(y, x)$, funcție ce devine nedefinită pentru $x = y = 0$.

3.3 Matrici de rotație 3D

Așa cum am văzut în cursul precedent, rotațiile 3D pot fi descrise prin matrici 3×3 :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

O matrice de rotație are 9 parametri, însă acești parametri nu pot avea orice valoare pentru ca R să fie o matrice de rotație validă. Pentru aceasta R trebuie să satisfacă următoarele două proprietăți:

1. ortogonalitate: $R^T R = I$, sau echivalent $R R^T = I$
2. orientare pozitivă: $\det(R) = 1$

3.3.1 Rotații orientate pe axă

Rotațiile pe axe individuale sunt cele mai directe de calculat, deoarece una din axe rămâne neschimbată, iar celelalte două vor efectua o rotație 2D în planul ortogonal.

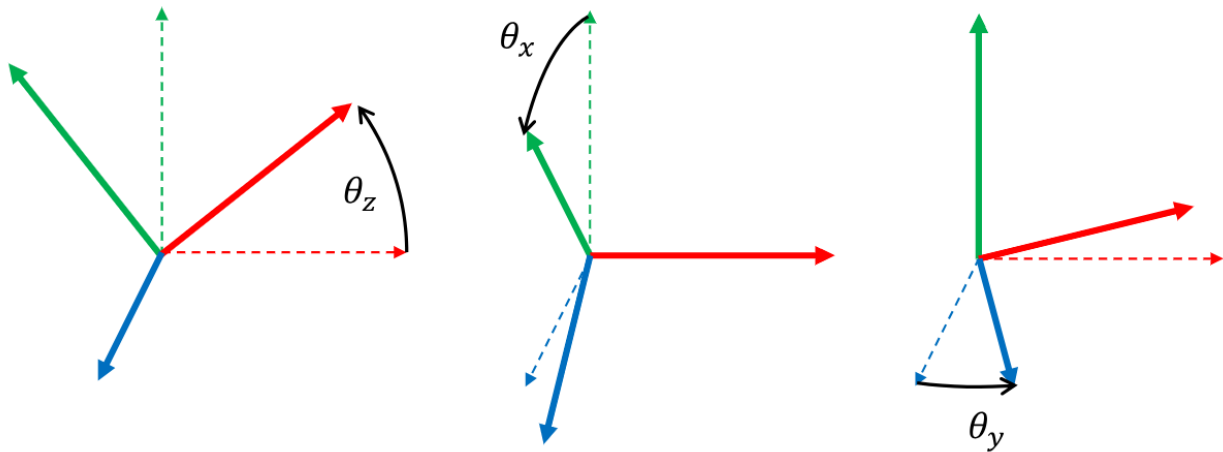


Fig. 3.2 Rotații orientate pe o axă.

Mai întâi, matricea de rotație în jurul axei Z conține o matrice de rotație 2D în colțul din stânga sus:

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Ne putem imagina această operație cu axa Z ieșind din planul paginii, X și Y formând axe în planul paginii. Rotația θ este în sens trigonometric. Se poate observa că punctele rotite nu își schimbă valoarea pe axa Z , proprietate menținută de a treia linie a matricei $(0, 0, 1)$.

Rotația în jurul axei X este similară, cu o matrice 2D de rotație ce apare de-a-lungul axelor Y și Z :

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

În final, rotația în jurul axei Y este similară, însă cu o schimbare de semn pentru sinus:

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Motivul pentru care termenii $\sin\theta$ își schimbă semnul este pentru că dacă ar fi să orientăm axa Y să poarte în afara paginii și axa X la dreapta, atunci axa Z va poarte în jos (direcția negativă).

3.3.2 Interpretare

Să luăm în considerare că XYZ reprezintă axele pre-rotatie, iar $X'Y'Z'$ axele post-rotatie. Prima coloană a matricii de rotație reprezintă coordonatele X' față de axa originală X după rotație:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Similar, a doua coloană ne indică coordonatele lui Y' față de Y : $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} r_{12} & r_{22} & r_{32} \end{bmatrix}^T$, respectiv a treia coloană coordonatele lui Z' față de Z : $\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}^T$.

De asemenea, din moment ce $R^{-1} = R^T$, axele vechiului sistem de coordonate față de noul sistem sunt linii individuale ale lui R .

Datorită regulii cosinusului, r_{11} este cosinusul unghiului dintre vechea și noua axă X' , acest termen fiind produsul scalar dintre \mathbf{x}' și $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$. În mod similar, celelalte elemente ale diagonalei reprezintă cosinusul unghiului dat de celelalte axe.

3.3.3 Operații

Aplicarea rotației unui punct. Această operație este reprezentată de multiplicarea unei matrici cu un vector.

Compunerea. Compunerea a două matrici de rotație R_1 și R_2 reprezintă pur și simplu înmulțirea matriceală R_1R_2 . Este important de remarcat aici că înmulțirea nu este comutativă, și anume $R_1R_2 \neq R_2R_1$.

Inversa. Inversa unei matrici de rotație este transpusa matricii.

3.3.4 Discuție

Compunerea matricilor de rotație poate fi dificilă datorită convenției rotației în jurul unui sistem de coordonate fix al lumii, sau în jurul coordonatelor locale. În acest curs vom folosi prima convenție, cunoscută sub numele de rotație *extrinsecă*. Fie R_1 o rotație în

jurul axei A și R_2 o rotație în jurul axei B . Când compunem R_1R_2 , înseamnă că un punct P exprimat în coordonatele locale \mathbf{p} va fi mai întâi rotit în jurul axei B , rezultând punctul P' , și apoi în jurul axei A , unde A este interpretată ca fiind fixă în sistemul de coordonate nerotit. Punctul final rezultat este P'' . Prin multiplicarea $R_1R_2\mathbf{p}$ obținem coordonatele lui P'' față de sistemul de coordonate nerotit, așa cum este ilustrat în Figura 3.3.

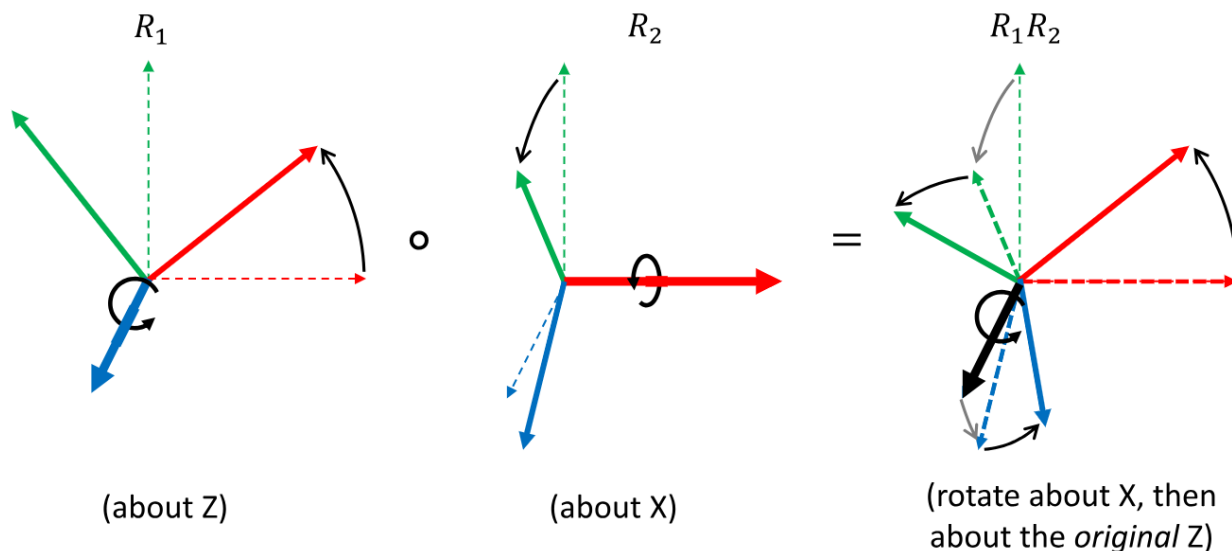


Fig. 3.3 Compunerea R_1R_2 corespunde aplicării rotației R_2 , urmată de aplicarea rotației R_1 . Aceasta înseamnă că sistemul de coordonate reprezentat de R_2 este rotit în jurul axei lui R_1 în sistemul de coordonate original.

Confuzia se produce atunci când axele de rotație sunt considerate ca fiind atașate sistemului de coordonate deja rotit (rotații *intrinseci*), care se produce atunci când se încearcă rezolvarea următoarei probleme: Fie $P = (1, 2, 3)$ un punct atașat sistemului de coordonate B . Să se găsească coordonatele lumii pentru punctul P atunci când B este rotit în jurul axei Z cu 90° , apoi cu 90° în jurul axei locale X a lui B , și în final translatat față de origine cu un offset $\mathbf{t}(10, 0, 5)$.

Aplicând local (intrinsec) transformatele, obținem valorile incorecte:

1. rotația $R_Z(90^\circ)$ transformă $(1, 2, 3)$ la $(-2, 1, 3)$
2. rotația $R_X(90^\circ)$ transformă $(-2, 1, 3)$ la $(-2, -3, 1)$
3. translația transformă $(-2, -3, 1)$ la $(8, -3, 6)$

Problema care apare mai sus este că după prima rotație axa locală X a fost rotită și nu mai este echivalentă cu axa X din coordonatele lumii, fiind acum aliniată cu axa Y a lumii. Secvența corectă de operații este:

1. rotația $R_Z(90^\circ)$ transformă $(1, 2, 3)$ la $(-2, 1, 3)$

2. rotația $R_Z(90^\circ)$ transformă de asemenea axa X locală cu axa Y a lumii
3. rotația $R_Y(90^\circ)$ transformă $(-2, 1, 3)$ la $(3, 1, 2)$
4. translația transformă $(3, 1, 2)$ la $(13, 1, 7)$

Rezultatul corect se poate obține prin inversarea ordinii aplicării matricilor de rotație:

$$R_Z(90^\circ)R_X(90^\circ)\mathbf{p} + \mathbf{t} \quad (3.10)$$

În general, rotațiile intrinseci se compun în ordine inversă față de cele extrinseci.

3.4 Unghiuri Euler

Unghiurile Euler sunt o modalitate de reprezentare a rotațiilor 3D prin 3 parametri (ϕ, θ, ψ) , fiind derivate din definițiile lui R_X , R_Y și R_Z . Acestea sunt una dintre cele mai simple metode de reprezentare, fiind ușor de interpretat. Ideea de bază este de a reprezenta rotațiile pe cele 3 axe ca și o compunere de 3 rotații aliniată pe axă. Ordinea care se aplică pentru rotație este stabilită prin convenție.

3.4.1 Convenții

De exemplu, convenția *roll – pitch – yaw* utilizată cu precădere în aeronautică consideră unghiul roll de-a-lungul axei X , pitch pe Y și yaw pe Z (v. Figura 3.4), rotația compusă fiind dată de:

$$R_{rpy}(\phi, \theta, \psi) = R_Z(\phi)R_Y(\theta)R_X(\psi) \quad (3.11)$$

Se poate observa că ordinea rotațiilor este Z, Y, X , această ordine fiind cunoscută ca și convenția ZYX . În această convenție, se aplică mai întâi roll (X), urmat de pitch (Y) și în final de (Z).

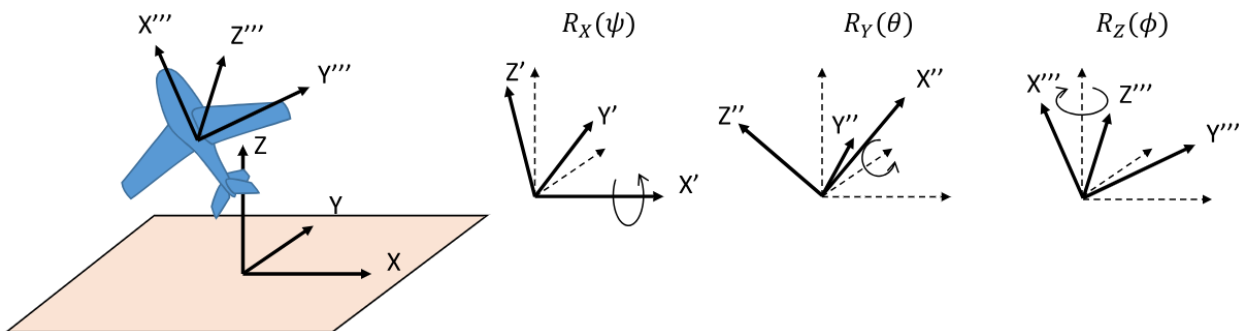


Fig. 3.4 Convenția roll-pitch-yaw.

Bineînțeles că există o multitudine de convenții, fiecare având forma:

$$R_{ABC}(\phi, \theta, \psi) = R_A(\phi)R_B(\theta)R_C(\psi) \quad (3.12)$$

unde A , B și C sunt una din cele 3 axe X , Y , sau Z . Pentru ca o convenție să fie validă, ea nu trebuie să conțină rotații adiacente pe aceeași axă (de exemplu convenția XXY nu este validă). Cu toate acestea, dacă două rotații neadiacente pot fi pe aceeași axă. De exemplu, următoarea convenție este validă:

$$R_{YZZ}(\phi, \theta, \psi) = R_Z(\phi)R_Y(\theta)R_Z(\psi) \quad (3.13)$$

3.4.2 Conversia în matrici de rotație

Conversia unghiurilor Euler în matrici de rotație este un calcul direct. Mai întâi, pentru convenția dată, vom introduce în ecuație termenii matricei de rotație corespunzători sinusurilor și a cosinusurilor. De exemplu, pentru conversia roll-pitch-yaw:

$$R_{rpy} = \begin{bmatrix} r11 & r12 & r13 \\ r21 & r22 & r23 \\ r31 & r32 & r33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 & s_1s_3 + c_1s_2c_3 \\ s_1c_2 & c_1c_3 + s_1s_2s_3 & s_1s_2c_3 - c_1s_3 \\ -s_2 & c_2s_3 & c_2c_3 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

unde pentru claritate s-au folosit notațiile $c_1 = \cos \phi$, $s_1 = \sin \phi$, $c_2 = \cos \theta$, $s_2 = \sin \theta$, $c_3 = \cos \psi$ și $s_3 = \sin \psi$.

3.4.3 Singularități: blocarea cardanului (en. gimbal lock)

Intervalul minim pentru unghiurile Euler (ϕ, θ, ψ) necesar pentru a acoperi orice rotație este $[0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi)$. Cu toate acestea, mulțimea unghiurilor Euler nu este echivalentă topologic cu $SO(3)$. Sunt anumite cazuri în care o singură rotație are un număr infinit de rotații. De exemplu, în convenția ABA , orice rotație pură de-a-lungul axei A poate fi reprezentată prin unghiuri Euler având $\theta = 0$, însă printr-un număr infinit de valori ϕ și ψ având suma constantă. În convenția roll-pitch-yaw, unghiul de pitch de $\pm\pi/2$ aliniaza axele roll (X) și yaw (Z). Astfel, când vehiculul este orientat în sus, există un număr infinit de soluții pentru ϕ și ψ .

Astfel de cazuri sunt denumite *singularități*. Singularitatea de mai sus este stabilită prin analogie cu cardanul (en. gimbal), care este un mecanism cu trei axe. Cardanele sunt de obicei utilizate în giroscopie pentru a măsura orientarea 3D cu ajutorul unei mase ce își păstrează orientarea absolută, în timp ce montajul care menține masa se rotește. Blocarea cardanului (en. gimbal lock) apare atunci când două axe ale mecanismului se aliniaza, punct în care măsurătorile cardanului devin nedefinite.

3.4.4 Inversa

Inversa unui set de unghiuri Euler (ϕ, θ, ψ) având convenția ABC este un alt set de unghiuri Euler $(-\psi, -\theta, -\phi)$, având convenția CBA .

3.5 Axă-unghi și reprezentări prin vector de rotație

O altă metodă întâlnită în reprezentarea rotațiilor este forma *axă-unghi*, care reprezintă o matrice de rotație ca și o rotație a unui unghi dat de-a-lungul unei axe unitate (v. Figura 3.5).

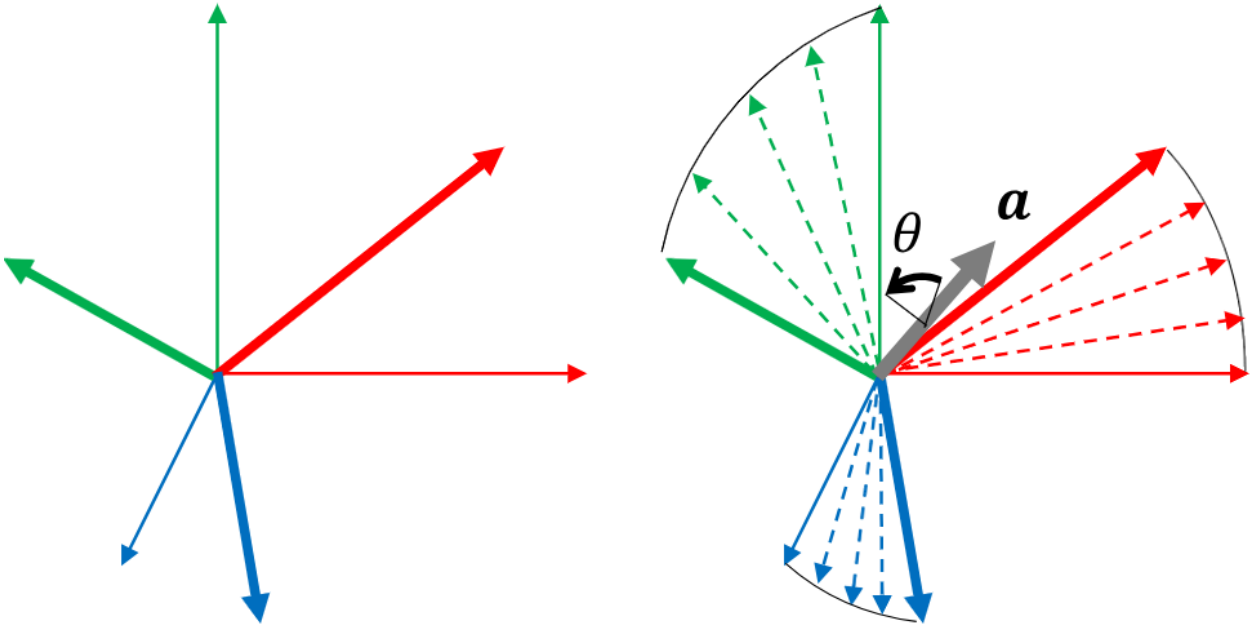


Fig. 3.5 Convenția unghi-axă.

Reprezentarea unghi-axă folosește o pereche \mathbf{a}, θ , unde \mathbf{a} este un vector unitate 3D și θ un unghi în intervalul $[0, \pi]$, având astfel 4 parametrii. Constrângerea $\|\mathbf{a}\| = 1$ înlătură un grad de libertate, generând un spațiu 3D de rotații.

O reprezentare înrudită, denumită *vector de rotație*, îmbunătățește reprezentarea unghi-axă prin simpla codare a axei ca și direcție, iar unghiul ca și lungimea vectorului 3D $\mathbf{m} = \theta\mathbf{a}$. Conversia dintre cele două reprezentări este ușoară, cu $\theta = \|\mathbf{m}\|$ și $\mathbf{a} = \mathbf{m}/\|\mathbf{m}\|$ dacă $\|\mathbf{m}\| \neq 0$. Intervalul de valori posibile pentru parametrii unui vector de rotație se găsesc într-o sferă de rază π . În literatură, reprezentarea prin vector de rotație se mai întâlnește sub denumirile de parametrii Rodrigues, coordonate exponențiale, sau viteze unghiulare.

3.5.1 Conversia la matrice de rotație

Conversia de la reprezentarea axă-unghi la matrice de rotație se poate face folosind formula Rodrigues:

$$R_{aa}(\mathbf{a}, \theta) = I + \sin \theta \hat{\mathbf{a}} + (1 - \cos \theta) \hat{\mathbf{a}}^2 \quad (3.15)$$

$$R_m(\mathbf{m}) = R_{aa}(\mathbf{m}/\|\mathbf{m}\|, \|\mathbf{m}\|) \quad (3.16)$$

unde $\hat{\mathbf{a}}$ este reprezentarea matriceală a unui vector 3D:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.5.2 Conversia din matrice de rotație

Dacă $\sin \theta \neq 0$, atunci:

$$a_x = (r_{32} - r_{23})/2 \sin \theta \quad (3.18)$$

$$a_y = (r_{13} - r_{31})/2 \sin \theta \quad (3.19)$$

$$a_z = (r_{21} - r_{12})/2 \sin \theta \quad (3.20)$$

În cazul în care $\sin \theta = 0$, avem fie situația în care $\theta = 0$, R fiind matricea identitate, sau $\theta = \pi$, caz în care $\cos \theta = -1$, deci $R = -I + 1\mathbf{a}\mathbf{a}^T$. Putem mai departe determina, până la precizia semnului:

$$a_x = \pm \sqrt{(r_{11} + 1)/2} \quad (3.21)$$

$$a_y = \pm \sqrt{(r_{22} + 1)/2} \quad (3.22)$$

$$a_z = \pm \sqrt{(r_{33} + 1)/2} \quad (3.23)$$

3.6 Quaternioni

Quaternionii sunt o reprezentare a rotației bazată pe o extensie a numerelor complexe. Numerele complexe unitate $c = \cos \theta + i \sin \theta$, cu $|c| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ pot reprezenta rotațiile 2D deoarece multiplicarea complexă efectuează rotație:

$$c(p + iq) = (p \cos \theta - q \sin \theta) + i(p \sin \theta + q \cos \theta) \quad (3.24)$$

unde componentele reale și imaginare sunt pozițiile pe axele X și Y ale unui punct (p, q) rotit cu unghiul θ . Echivalentul în 3D a acestei reprezentări sunt quaternionii.

Quaternionii (q_0, q_1, q_3, q_4) sunt compuși dintr-o coordonată reală q_0 și trei coordonate

imaginare q_1 , q_2 și q_3 ale unui număr complex:

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \quad (3.25)$$

unde i , j și k sunt numere imaginare având proprietățile:

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $i = jk = -kj$
- $j = ki = -ik$
- $k = ij = -ji$

Se poate observa că regulile de multiplicare de mai sus nu sunt simetrice. Produsul a doi quaternioni este o operație nesimetrică ce este definită prin aplicarea distributivității și a regulilor de mai sus:

$$\begin{aligned} qp &= (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)(p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3) \\ &= q_0(p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3) + iq_1(p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3) + \\ &\quad jq_2(p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3) + kq_3(p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3) \\ &= q_0p_0 + iq_0p_1 + jq_0p_2 + kq_0p_3 + iq_1p_0 + i^2q_1p_1 + ijq_1p_2 + ikq_1p_3 + \\ &\quad jq_2p_0 + jiq_2p_1 + j^2q_2p_2 + jkq_2p_3 + kq_3p_0 + kiq_3p_1 + kjq_3p_2 + k^2q_3p_3 \\ &= (q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3) + i(q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2) + \\ &\quad j(q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + q_3p_1) + k(q_0p_3 + q_3p_0 + q_1p_2 - q_2p_1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Norma unui quaternion este definită ca și quaternionul unitate:

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1 \quad (3.27)$$

Quaternionul unitate are proprietatea specială că inversa lui este egală cu negarea componentelor imaginare:

$$q^{-1} = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3 \quad (3.28)$$

Dându-se un punct 3D $\mathbf{p} = (x, y, z)$ și reprezentarea sa ca și quaternion $p = (0, x, y, z)$, există o operație denumită *conjugată* lui p cu un quaternion unitate q , în așa fel încât rezultatul să fie un punct rotit $p' = (0, x', y', z')$:

$$p' = qpq^{-1} \quad (3.29)$$

Relația dintre un quaternion și reprezentarea axă-unghi (\mathbf{a}, θ) este dată de conversia:

$$(q_0, q_1, q_2, q_3) = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)a_x, \sin(\theta/2)a_y, \sin(\theta/2)a_z) \quad (3.30)$$

Conversia unui quaternion la matrice de rotație este dată de:

$$R_q(q) = \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

3.6.1 Compunerea a doi quaternioni

Quaternionii au avantajul compunerii mai facile față de matricile de rotație, datorită faptului că produsul a doi quaternioni este o compoziție. Această operație necesită 16 înmulțiri și 12 adunări/scăderi, față de 27 de înmulțiri și 18 adunări în cazul multiplicării matricilor.

3.7 Concluzii

Nu există o reprezentare ideală a rotațiilor pentru toate cazurile practice, fiecare reprezentare având o matrice de rotație echivalentă. Cu toate acestea, este necesară o convenție care să fie respectată în calcule. În tabela de mai jos se regăsesc sumarizate avantajele și dezavantajele diferitelor metode de reprezentare a rotațiilor:

Reprezentare	Parametrii
Matrice de rotație	Matrice R de dimensiune 3×3 , cu 6 grade de libertate înlăturate datorită contrângerilor de ortogonalitate.
Unghiuri Euler	3 parametri (ϕ, θ, ψ) , în intervalul $[0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi)$.
Axă-unghi	3 + 1 parametri (\mathbf{a}, θ) , în intervalul $S_2 \times [0, \pi)$, cu un grad de libertate înlăturat prin contrângerea vectorului unitate $ \mathbf{V}\mathbf{a} = 1$.
Vector de rotație	3 parametri \mathbf{m} în intervalul $ m \leq \pi$.
Quaternion	4 parametri (q_0, q_1, q_3, q_4) , cu un grad de libertate înlăturat prin constrângerea quaternionului unitate.

Bibliografie

- [1] K. Hauser, *Robotic Systems*. Illinois, IL, USA: university of illinois urbana-champaign, 2023. [Online]. Available: <https://motion.cs.illinois.edu/RoboticSystems/>