

## 2. Transformări de coordonate

---

Vectori și coordonate  
Transformări de coordonate  
Compunerea transformărilor de coordonate  
Transformări rigide  
Reprezentarea în coordonate omogene

---

În aproape toate domeniile de inginerie, este esențială identificarea și manipularea expresiilor matematice ce exprimă elemente fizice, din lumea reală. Sistemele robotice inteligente construiesc un model mental al lor și a lumii din jurul lor, urmând ca apoi să îl modifice atunci când interpretează trecutul și prezic viitorul.

Două din cele mai importante reprezentări matematice sunt vectorii și matricile din algebra liniară. Vectorii sunt de obicei reprezentări ale poziției și orientării în spațiul 2D sau 3D, însă pot la fel de bine să reprezinte și alte variabile, precum masurători achiziționate de la un senzor. Matricile sunt elemente ce descriu cum se modifică reprezentările.

În acest curs, vom discuta cum vectorii și matricile sunt utilizate în robotică pentru reprezentarea pozițiilor 2D și 3D, mișcarea corpului rigid și pentru transformarea de coordonate.

### 2.1 Vectori și coordonate

Vectorii extind conceptul de lucru cu numere reale  $\mathbb{R}$  la spații multidimensionale. Aceștia reprezintă colecții de numere reale ce au o înțelegere comună, precum poziție sau direcție, sau citirea unei semnal la un anumit moment de timp.

De obicei, se folosește spațiul Euclidian  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , în care un vector este un simplu tuplu de numere reale  $n$ . Vectorii sunt stocați ca și înșiruiri de numere.

#### 2.1.1 Sisteme de coordonate 2D

Un vector  $n$ -dimensional  $\mathbf{x}$  este un tuplu de numere reale  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , în cazul 2-dimensional fiind  $\mathbb{R}^2$ .

O poziție 2D  $P$  este reprezentată de un vector cu 2 elemente  $\mathbf{x} = (p_x, p_y)$  ce redă coordonatele relative față de axele  $X$  și  $Y$ , axe ce se intersectează la poziția  $O$ , denumită origine (vezi Figura 2.1).

$O$  reprezintă o poziție arbitrară în spațiu, iar  $X$  și  $Y$  sunt direcții ortogonale, cu  $Y$  rotit

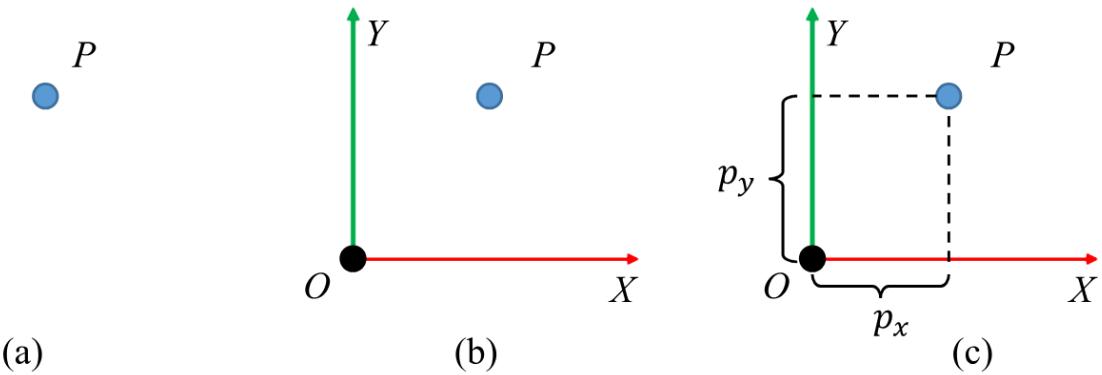


Fig. 2.1 (a) Un punct  $P$  în plan. (b) Coordonatele de referință pentru determinarea poziției punctului  $P$ . (c) Deplasarea (offset-ul) punctului  $P$  față de originea sistemului de coordonate  $XY$ .

la  $90^\circ$  în sens trigonometric față de  $X$ . O poziție fizică este definită doar de coordonate aflate într-un anumit sistem de coordonate.

### 2.1.2 Sisteme de coordonate 3D

O poziție 3D este reprezentată de un vector de 3 elemente  $p = (p_x, p_y, p_z)$ , ce exprimă coordonate față de axe  $X$ ,  $Y$  și  $Z$ , respectiv deplasare față de originea  $O$  în spațiul 3D unde se intersectează axe. Notația matematică este dată de vectorul coloană:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Vectorii sunt de asemenea utilizati în exprimarea deplasării, direcției, sau a derivatei. O deplasare este o diferență între 2 puncte. De exemplu,  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$  ne arată deplasamentul necesar în direcțiile  $X$  și  $Y$  pentru a ne mișca de la punctul  $P$  la punctul  $Q$ , unde  $\mathbf{q}$  exprimă coordonatele lui  $Q$  față de același sistem de coordonate. Acest vector are atât direcție, cât și magnitudine. Direcția nu are magnitudine și este definită ca și *vector unitate*. Direcția de la  $P$  la  $Q$  este dată de:

$$\frac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|} \quad (2.2)$$

În 2D, direcția poate fi dată și sub formă de unghi  $\theta \in [0, 2\pi) rad$ , luând în considerare convenția că unghiul măsoară direcția în sensul trigonometric de la axa  $X$ . Vectorul unitate corespondent este  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

O derivată este o deplasare *infinitesimal* de mică. Dacă poziția  $P(t)$  este o funcție dependentă de  $t$ , atunci derivata sa este un vector  $\mathbf{p}'(t) = (p_x(t), p_y(t))$ .

Diferența principală dintre poziții și direcții este că direcțiile nu variază față de un sistem de coordonate. Cu toate acestea, atât pozițiile, cât și direcțiile, sunt afectate de sistemul de

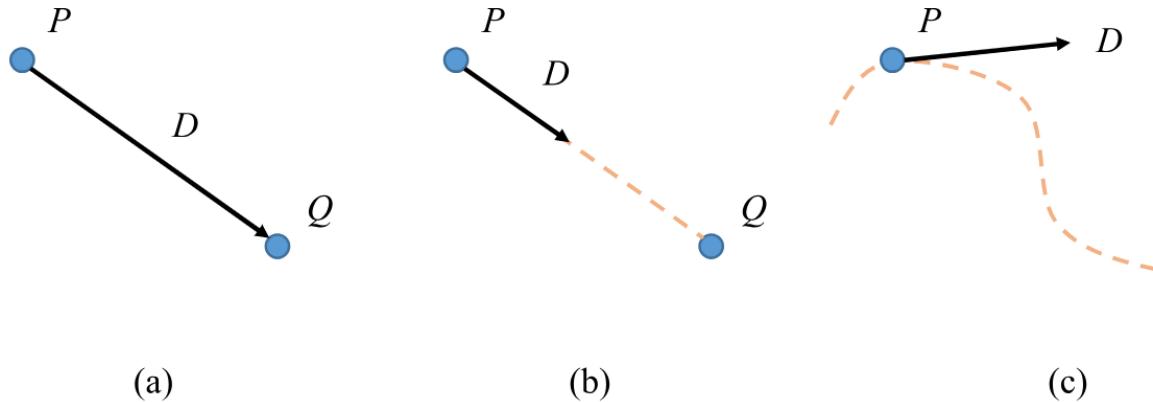


Fig. 2.2 Cantități ce indică direcții pentru deplasări (a), direcții (b) și derivate (c).

coordonate ales.

### 2.1.3 Operații geometrice

Coordonatele unui punct  $\mathbf{p}$  după translația cu un deplasament  $\mathbf{d}$  poate fi calculata utilizând adunarea vectorilor  $\mathbf{p} + \mathbf{d}$ . Interpolarea și extrapolarea punctelor intermediare dintre  $\mathbf{p}$  și  $\mathbf{q}$  este dată de ecuația:

$$\mathbf{x}(u) = (1 - u)\mathbf{p} + u\mathbf{q}, \quad (2.3)$$

unde  $u \in \mathbb{R}$ . Această ecuație începe la  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}$ , unde  $u = 0$  și se termină la  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{q}$ , unde  $u = 1$ . Extrapolarea poate fi obținută pentru  $u < 0$  și  $u > 1$ , așa cum este ilustrat în Figura 2.3.

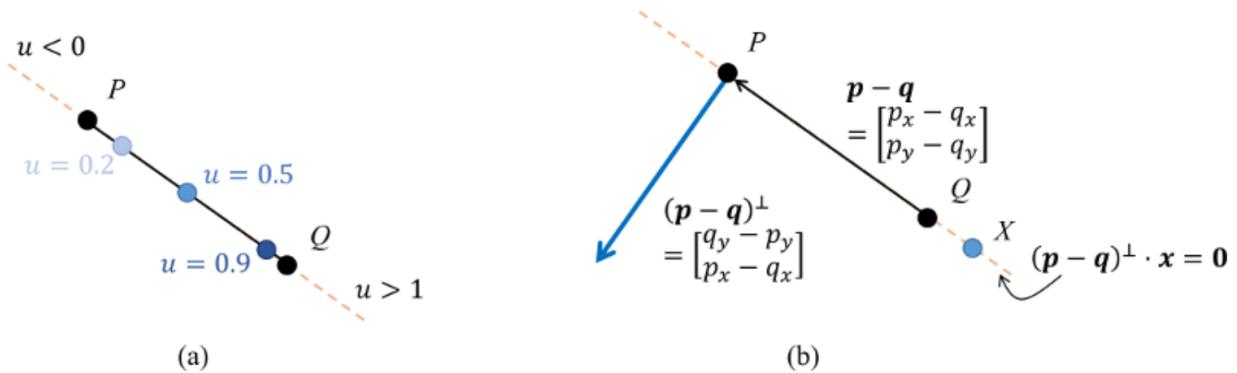


Fig. 2.3 Linia ce trece prin punctele  $P$  și  $Q$  poate fi modelată ca și interpolare parametrică (a) sau ca și ecuația unui plan (b).

Linia ce trece prin  $\mathbf{p}$  și  $\mathbf{q}$  poate fi obținută utilizarea interpolării / extrapolării de mai sus de-a-lungul întregii plaje de valori  $u \in \mathbb{R}$ . Segmentul de linie dintre  $\mathbf{p}$  și  $\mathbf{q}$  este obținut folosind valorile lui  $u$  din intervalul  $[0, 1]$ .

## 2.2 Transformări

O transformare  $T$  este o funcție ce mapează un vector  $n$ -dimensional la alt vector  $n$ -dimensional:

$$T : \Re^n \rightarrow \Re^n \quad (2.4)$$

Transformările pot reprezenta operații geometrice, ce sunt generate de mișcare sau acțiune, sau de schimbarea sistemului de coordonate, lucru ce determină schimbarea interpretării poziției și orientării. O multitudine de transformări spațiale, inclusiv translația, rotația și scalarea, sunt reprezentate prin operații matriciale. Schimbarea sistemelor de coordonate sunt de asemenea operații matriciale.

### 2.2.1 Transformări liniare

O *transformare liniară* este acea transformare care poate fi reprezentată prin operația matricială:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \quad (2.5)$$

unde  $\mathbf{x} \in \Re^m$ ,  $\mathbf{y} \in \Re^n$ , iar  $\mathbf{A}$  este o matrice  $m \times n$ . Pentru cazul 2D, această operație are forma:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap_x + bp_y \\ cp_x + dq_y \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

În cazul 3D, o transformare liniară are forma:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_x + a_{12}p_y + a_{13}p_z \\ a_{21}p_x + a_{22}p_y + a_{23}p_z \\ a_{31}p_x + a_{32}p_y + a_{33}p_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Rotații în 2D

Rotațiile în jurul originii folosind un unghi  $\theta$  pot fi definite ca și transformări liniare. Se dau:

- două sisteme de coordonate  $XY$  și  $X'Y'$ , ambele având originea în  $O$ ;
- sistemul  $XY$  este sistemul de coordonate pre-rotație;
- sistemul  $X'Y'$  este sistemul de coordonate post-rotație.

Așa cum este ilustrat în Figura 2.4, noua axă  $X'$  are coordonatele  $\mathbf{x} = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Analog, axa  $Y'$  are coordonatele  $\mathbf{y} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ .

În următorul pas, luăm în considerare faptul că un punct  $P$  a fost rotit la punctul  $P'$

odată cu sistemul de coordonate.  $P'$  are în continuare aceleasi coordonate  $(p_x, p_y)$ , însă față de sistemul  $X'Y'$ . Punctul  $P'$  este obținut prin deplasamentul  $p_x$  de la originea lui  $X'$  și  $p_y$  de la originea lui  $Y'$ . Astfel, pentru a obține noile coordonate ale punctului  $\mathbf{p}$ , putem aplica relația:

$$\mathbf{p}' = p_x \mathbf{x}' + p_y \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} p_x \cos(\theta) - p_y \sin(\theta) \\ p_x \sin(\theta) + p_y \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

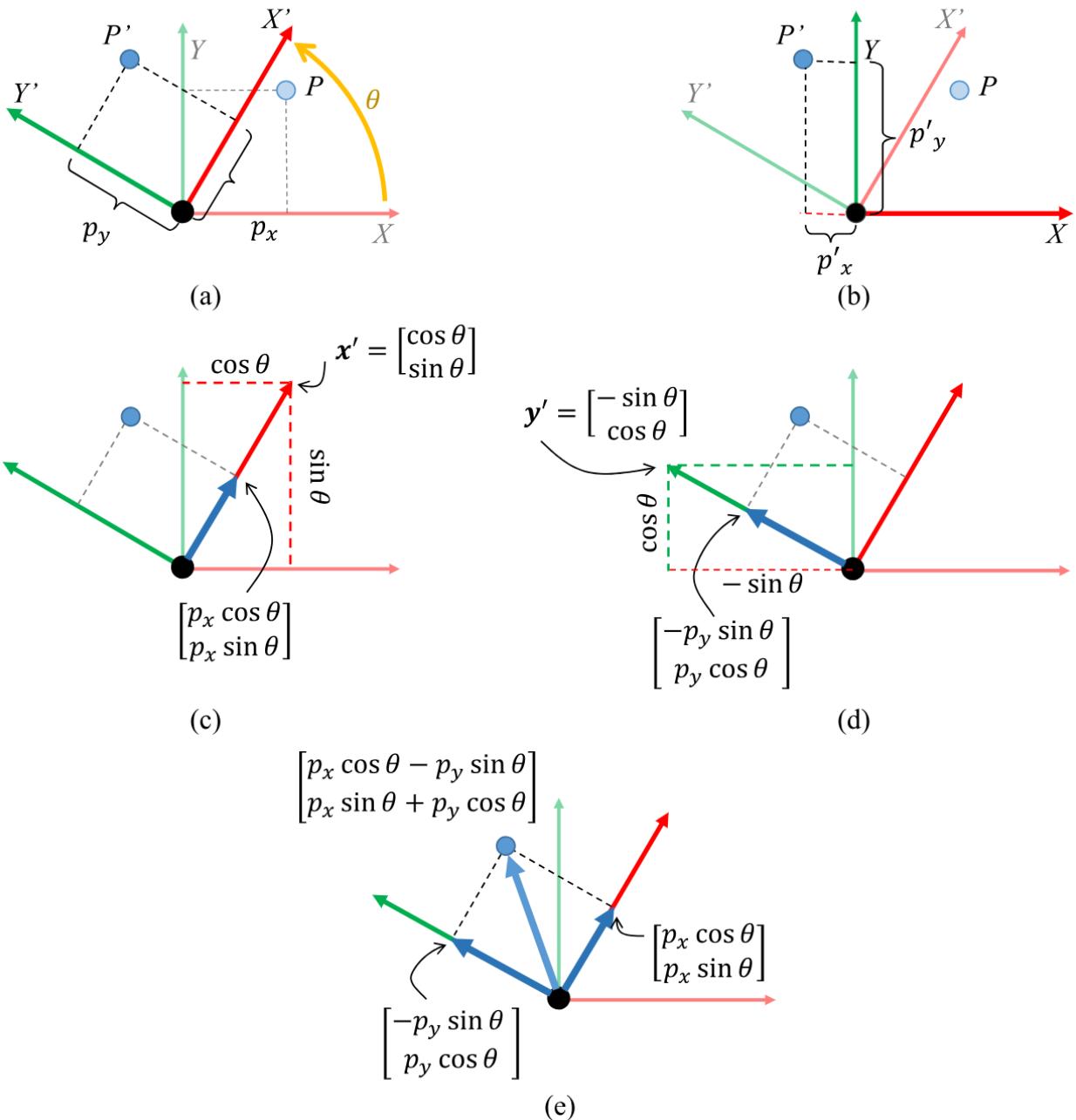


Fig. 2.4 Rotația sistemului de coordonate și obținerea coordonatelor punctului  $P'$ .

Ecuatia de mai sus poate fi rescrisă compact sub forma:

$$\mathbf{p}' = R(\theta)\mathbf{p} \quad (2.9)$$

unde matricea de rotație este:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Astfel de matrici au următoarele proprietăți:

1. Compunerea a două matrici  $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$  este echivalentă cu suma unghiurilor;
2. Determinantul are valoarea 1 pentru orice  $\theta$ :  $\det(R(\theta)) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ;
3. Datorită identității  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  și  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ , operația de rotație cu unghiul  $-\theta$  este echivalentă cu matricea transpusă:

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = R(\theta)^T \quad (2.11)$$

4. Matricile de rotație fiind ortogonale, transpusa unei matrici de rotație este echivalentă cu inversa sa:

$$R(-\theta) = R(\theta)^T = R(\theta)^{-1} \quad (2.12)$$

5. norma unui vector este invariantă la rotație:

$$\|R(\theta)\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \quad (2.13)$$

Spațiul de rotații 2D este cunoscut ca și *grupul special ortogonal*  $SO(2)$ . Motivul pentru care este denumit grup special ortogonal este datorat faptului că acesta conține întregul set de matrici ortogonale  $2 \times 2$  cu determinant pozitiv, chiar dacă există anumite matrici ortogonale cu determinantul  $-1$ .

### 2.2.3 Rotări în 3D

In spațiu 3D, rotările sunt definite tot prin transformări liniare, cu toate că parametrizarea lor nu este așa de simplă ca în cazul 2D. O rotație 3D este reprezentată prin ecuația matriceală:

$$\mathbf{p}' = R\mathbf{p} \quad (2.14)$$

unde  $R$  este o matrice de rotație  $3 \times 3$ .

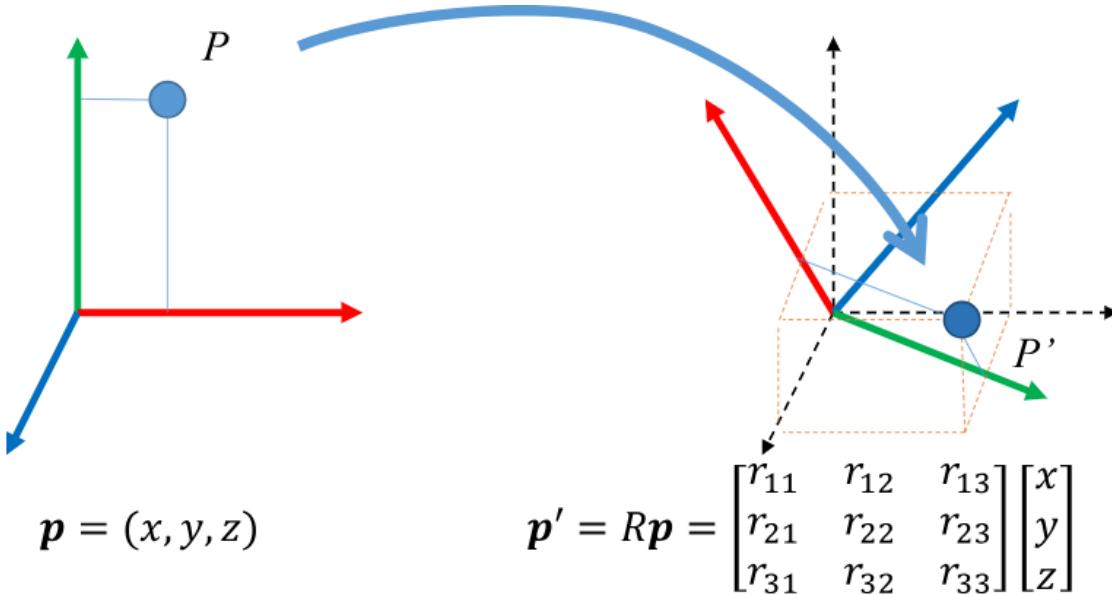


Fig. 2.5 După o rotație, coordonatele punctului transformat față de axele originale sunt determinate prin multiplicarea sa cu matricea de rotație  $R$ .

Ca și în 2D, matricile de rotație satisfac următoarele proprietăți:

1. Compunerea a două matrici de rotație  $R_1R_2$  rezultă tot o matrice de rotație.
2. În general  $R_1R_2 \neq R_2R_1$ , doar dacă cele două matrici împart o axă comună.
3. Determinantul  $\det(R) = 1$  pentru toate matricile de rotație.
4. Transpusa unei matrici de rotație este inversa sa:  $R^T = R^{-1}$ , sau  $RR^T = R^TR = I$ .
5. Norma unui vector este invariантă la rotație.

Spațiul rotațiilor 3D este denumit *grupul special ortogonal*  $SO(3)$ .

O altă definiție a matricilor de rotație este prin interpretarea fiecărei coloane ca și coordonatele fiecărei axe după rotație. Cu alte cuvinte, când un sistem de coordonate se rotește cu matricea  $R$  în jurul originii, elementele matricei de rotație pot fi interpretate ca și:

$$R = \begin{bmatrix} x_x & y_x & z_x \\ x_y & y_y & z_y \\ x_z & y_z & z_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

unde  $(x_x, x_y, x_z)$  indică coordonatele noii axe  $X$  în vechiul sistem de coordonate,  $(y_x, y_y, y_z)$  coordonatele noii axe  $Y$ , iar  $(z_x, z_y, z_z)$  coordonatele noii axe  $Z$ .

Această interpretare este utilă când dorim să determinăm coordonatele unui punct rotit în sistemul de coordonate original. Dacă punctul este definit ca și  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ , în aşa fel încât  $P - O = p_xX + p_yY + p_zZ$ , atunci noile coordonate ale lui  $P$  față de vechiul sistem de coordonate (original) sunt date de  $R\mathbf{p}$ .

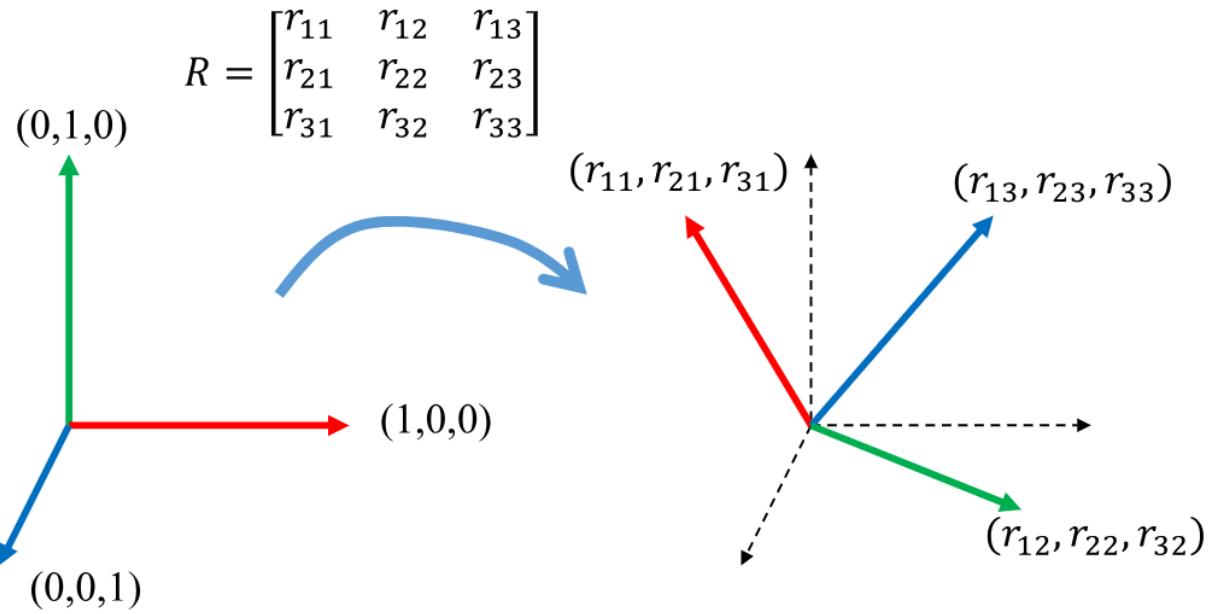


Fig. 2.6 O rotație 3D este reprezentată de o matrice  $3 \times 3$ , a căror coloane indică coordonatele axelor rotite *relativ* de axele originale.

#### 2.2.4 Scalarea

Scalarea aliniată la axă (axis-aligned) în spațiul 2D poate fi de asemenea reprezentată printr-o transformare liniară:

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

unde  $s_x$  reprezintă factorul de scalare în direcția lui  $X$ , iar  $s_y$  factorul de scalare în direcția lui  $Y$ . Dacă  $s_x = s_y$ , atunci scalarea este denumită ca fiind uniformă.

Această definiție poate fi generalizată la cazul  $n$ -dimensional utilizând un vector  $n$ -dimensional  $\mathbf{s}$ , care determină scalarea în fiecare direcție printr-o matrice diagonală  $n \times n$ :

$$S(\mathbf{s}) = \text{diag}(\mathbf{s}) \quad (2.17)$$

#### 2.2.5 Componerea transformărilor liniare

Atunci când se aplică două transformări liniare una după cealaltă, rezultatul poate fi determinat prin multiplicarea matricelor. Luând în considerare că  $T_1(\mathbf{x})$  și  $T_2(\mathbf{x})$  sunt ambele transformări liniare ce utilizează matricile  $A$ , respectiv  $B$ . Când aplicăm mai întâi transformarea  $T_2$  obținem  $\mathbf{y} = T_2(\mathbf{x})$ , urmată de transformarea  $T_1$ , prin care obținem  $\mathbf{z} = T_1(\mathbf{y})$ . Rezultatul final este:

$$\mathbf{z} = T_1(T_2\mathbf{x})) \quad (2.18)$$

unde, chiar dacă transformarea  $T_1$  este scrisă prima în ecuație, ea este aplicată după transformata  $T_2$ . Sub formă de produs matriceal, această dublă transformare este scrisă:

$$\mathbf{z} = AB\mathbf{x} \quad (2.19)$$

Ca și rezultat, compunerea funcțiilor  $T_1 \circ T_2$  este de asemenea o transformare liniară cu matricea  $AB$ .

Folosind compozitia, se pot deriva și alte transformări utile, precum scalarea nealiniată la o axă. Dacă dorim să scalăm pe o anumită axă cu valoarea  $s$  în direcția  $\mathbf{v}$ , unde  $\mathbf{v}$  este un vector unitate. Operația poate fi efectuată prin rotația cu unghiul  $\theta$ , în aşa fel încât axa  $X$  să fie aliniată cu  $\mathbf{v}$ , urmată de scalarea aliniată la axă și rotația inversă către sistemul de coordonate original. Astfel, dacă:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} v_x & v_y \\ -v_y & v_x \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

rezultatul compunerii este:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} v_x & -v_y \\ v_y & v_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x & v_y \\ -v_y & v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x & -v_y \\ v_y & v_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sv_x & sv_y \\ -v_y & v_x \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} sv_x^2 + v_y^2 & sv_xv_y - v_yv_x \\ sv_xv_y - v_xv_y & sv_y^2 + v_x^2 \end{bmatrix} = I + (s-1) \begin{bmatrix} v_x^2 & v_xv_y \\ v_xv_y & v_y^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Foarte important este de observat că ordinea multiplicării matricilor contează în rezultatul final. O rotație urmată de o scalare nu este neapărat echivalentă cu o scalare urmată de o rotație.

## 2.2.6 Transformări rigide

Transformările rigide în 2D au două proprietăți:

1. Distanța dintre două puncte nu se modifică după transformare.
2. În 2D, orientarea și aria unui triunghi nu se modifică, iar în 3D, orientarea și volumul unui tetraedru nu se modifică.

Formula tuturor transformărilor rigide este dată de o rotație  $R$ , urmată de o translație  $\mathbf{t}$ :

$$T(\mathbf{x}) = R\mathbf{x} + \mathbf{t} \quad (2.22)$$

unde regula este de a aplica mai întâi rotația în jurul originii, urmată de translație.

De asemenea, este posibil să interpretăm transformările rigide ca și rotații în jurul unui punct arbitrar. Fie un *centru de rotație*  $\mathbf{c}$ , o rotație în jurul lui  $\mathbf{c}$  poate fi construită prin translatarea unui punct în aşa fel încât  $\mathbf{c}$  să fie originea, urmată de rotația în jurul originii folosind o matrice  $R$ , iar în final translatănd din nou în originea sistemului de coordonate original:

$$T(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} \quad (2.23)$$

unde termenul din paranteze reprezintă translația în  $\mathbf{c}$  ca și origine, înmulțirea cu  $R$  este rotația în jurul originii, iar adunarea cu  $\mathbf{c}$  reprezintă translația înapoi la sistemul de coordonate original. Cele două reprezentări sunt legate prin:

$$\mathbf{t} = \mathbf{c} - R\mathbf{c} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{c} = (I - R)^{-1}\mathbf{t} \quad (2.25)$$

Setul de transformări rigide este denumit *grupul special Euclidean SE(2)* în 2D, respectiv *SE(3)* în 3D. Aplicarea repetată de transformări rigide produce la final o transformare rigidă. Dându-se două transformări rigide:

$$T_1(\mathbf{x}) = R_1\mathbf{x} + \mathbf{t}_1 \quad (2.26)$$

$$T_2(\mathbf{x}) = R_2\mathbf{x} + \mathbf{t}_2 \quad (2.27)$$

transformarea compusă  $T_1 \circ T_2$  reprezintă aplicarea mai întâi a transformării  $T_2$ , urmată de  $T_1$ . Fie  $\mathbf{y} = T_2(\mathbf{x})$  și  $\mathbf{z} = T_1(\mathbf{y})$ , atunci:

$$\mathbf{z} = T_1(T_2(\mathbf{x})) = R_1(R_2\mathbf{x} + \mathbf{t}_2) + \mathbf{t}_1 \quad (2.28)$$

Utilizând proprietatea de distributivitate a înmulțirii de matrici obținem:

$$\mathbf{z} = R_1R_2\mathbf{x} + R_1\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 \quad (2.29)$$

unde ecuația de mai sus este o simplă transformare rigidă folosind matricea de rotație  $R_1R_2$  și translație folosind  $(R_1\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1)$

### 2.2.7 Transformări inverse

Nu toate matricile de transformare au și o inversă, însă cele de rotație, translație și transformări rigide au. Inversa unei matrici de rotație este pur și simplu transpusa ei.

Translațiile sunt inverseate prin translatarea în direcția negativă. Transformările liniare  $A\mathbf{x}$  au o inversă doar dacă matricea  $A$  este inversabilă, și anume  $A^{-1}\mathbf{x}$ .

Transformările rigide sunt de asemenea inversabile, inversa fiind tot o transformare rigidă:

$$T_{R,\mathbf{t}}^{-1} = T_{R^T, -R^T \mathbf{t}} \quad (2.30)$$

unde  $T_{R,\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = R\mathbf{x} + \mathbf{t}$ .

### 2.2.8 Mișcarea corpului rigid

Mișcarea corpurilor rigide în spațiu este reprezentată prin transformări rigide. Dacă, în 2D, originea unui corp rigid se deplasează cu translația  $\mathbf{t}$  în sistemul de coordonate original și se rotește cu unghiul  $R = R(\theta)$ , atunci transformata care *convertește poziții din nouul sistem de coordonate în vechiul sistem* este dată de  $T_p(\mathbf{x}) = R\mathbf{x} + \mathbf{t}$ . Cu alte cuvinte, dacă  $\mathbf{x}$  ne dă coordonatele unei poziții  $P$  atașate unui corp, atunci, în urma mișcării,  $P$  va avea coordonatele  $T_p(\mathbf{x})$  relativ față de coordonatele inițiale ale corpului. Particular, transformarea coordonatelor de direcție va fi pur și simplu dată de o rotație, ignorând translația:  $T_p(\mathbf{v}) = R\mathbf{v}$ .

### 2.2.9 Reprezentarea sistemelor de coordonate și a transformărilor de coordonate

Sistemele de coordonate, la ca și conversiile dintre ele, sunt reprezentate prin transformări rigide.

Orice sistem de coordonate  $F$  în spațiul 2D, având originea  $O$  și axele  $XY$ , poate fi reprezentat prin coordonatele  $O$ ,  $X$  și  $Y$  într-un *sistem de coordonate al lumii (world coordinate system)*  $W$ . Dacă  $O$  are coordonatele  $\mathbf{t}$  și  $X$  și  $Y$  au direcțiile  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  și  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  față de  $W$ , atunci coordonatele lumii față de orice punct  $P$ , în aşa fel încât coordonatele lui  $P$  să fie în sistemul de coordonate  $F$ , pot fi calculate prin transformata rigidă:

$$\mathbf{p}_W = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \mathbf{p} + \mathbf{t} \quad (2.31)$$

Astfel, informația pe care trebuie să o stocăm pentru a efectua transformările sunt matricea de rotație  $R = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$  și translația  $\mathbf{t}$ .

Cazul 3D este similar, necesitând stocarea matricei de rotație  $R$  și originea sistemului de coordonate  $\mathbf{t}$ . Această operație este cunoscută ca și transformarea de coordonate  $A \rightarrow W$ , unde  $A$  este coordonata *sursă*, iar  $W$  este coordonata *destinație*. Calculul invers  $W \rightarrow A$  poate fi obținut prin aplicarea transformatei inverse.

Schimbarea sistemului de coordonate poate fi reprezentată tot prin transformări rigide.

Fie  $A$  și  $B$  două sisteme de coordonate, unde  $W$  este reprezentat față de sistemul de coordonate al lumii prin matricea de rotație  $R_A$  și translație  $\mathbf{t}_A$ , iar  $B$  prin  $R_B$  și  $\mathbf{t}_B$ . Dându-se coordonatele  $\mathbf{p}^A$  al unui punct  $P$  față de  $A$ , putem determina coordonatele lui  $P$  față de  $\mathbf{p}^B$  prin doi pași. Mai întâi se calculează coordonatele lui  $\mathbf{p}$  față de lume:

$$\mathbf{p}^W = T_A(\mathbf{p}^A) = R_A \mathbf{p}^A + \mathbf{t}_A \quad (2.32)$$

urmând apoi să calculăm coordonatele punctului  $P$  față de  $B$ , prin calculul inversei lui  $B$  față de coordonatele lumii:

$$\mathbf{p}^B = T_B^{-1}(\mathbf{p}^W) = R_B^T(\mathbf{p}^W - \mathbf{t}_B) \quad (2.33)$$

Cele două ecuații de mai sus pot fi aplicate prin compunerea transformatorilor  $A \rightarrow W$  și  $W \rightarrow B$ :

$$\mathbf{p}^B = T_B^{-1}(T_A(\mathbf{p}^A)) = R_B^T R_A \mathbf{p}^A + R_B^T(\mathbf{t}^A - \mathbf{t}_B) \quad (2.34)$$

### 2.2.10 Reprezentarea în coordonate omogene

Coordonatele omogene sunt o reprezentare a transformărilor rigide ca și transformări liniare pe un spațiu extins. Acestea încorporează compact atât poziția, cât și direcția. În esență, convenția este să augmentăm fiecare punct cu o *coordonată omogenă* adițională, care este 1 pentru poziție și 0 pentru direcție. Astfel, punctele și direcțiile 2D devin:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

O transformare rigidă în 2D încorporează atât poziția și direcția, fiind reprezentată de multiplicarea cu o matrice  $3 \times 3$ :

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & t_x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.37)$$

unde transformarea originală  $T(\mathbf{x}) = R(\theta)\mathbf{x} + \mathbf{t}$  este o rotație în jurul unghiului  $\theta$ , urmată de o translație cu vectorul  $\mathbf{t} = (t_x, t_y)$ .

În 3D, punctele și direcțiile primesc o a patra coordonată:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

O transformare 3D este reprezentată de multiplicarea cu o matrice  $4 \times 4$ :

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} & & t_x \\ R & & t_y \\ & & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.40)$$

Avantajul acestei reprezentări este că aplicarea rotațiilor și translațiilor pe puncte se transformă în multiplicare de matrici și vectori, respectiv compunerea transformărilor devine multiplicare de matrici. Transformarea rigidă inversă este dată de inversarea matricei de transformare.

Aceasta facilitează scrierea transformărilor complexe. Spre exemplu, să considerăm transformarea din sistemul de coordonate  $A$  în  $B$ . În loc să scriem expresia operatorului  $T_B^{-1}(T_A(\mathbf{p}^A))$ , putem folosi reprezentarea în coordonate omogene, unde operatorul devine o înșiruire de multiplicări matrice-matrice și matrice-vector:

$$\mathbf{p}^B = T_B^{-1} \cdot T_A \cdot \mathbf{p}^A \quad (2.41)$$

### 2.2.11 Coordonatele în practică

Ca și convenție, sistemele de referință sunt notate cu litere mari, variabilele fiind adnotate cu aceste litere. Vom indica sistemul de referință al fiecărei coordonată printr-un superscript (e.g.  $\mathbf{p}^A$  reprezintă un punct în sistemul de referință  $A$ ). O transformare de coordonate de la sistemul de referință  $A$  la sistemul  $B$  se notează cu  $T_A^B$ .

În practică, putem considera că:

- $F$  la *superscript*: coordonatele sunt interpretate ca "relativ față de  $F$ ".
- $F$  la *subscript*: este interpretat ca "o transformare către sistemul de referință  $F$ ".

În această convenție, subscripts și superscripts trebuie să se anuleze pentru ca ecuația să aibă sens, aplicând următoarele reguli:

1. când se aplică o transformare la o coordonată, subscriptul transformatei sursă trebuie să fie identic cu superscriptul coordonatei. De exemplu,  $\mathbf{p}^B = T_A^B \mathbf{p}^A$  este permis, însă  $T_B^A \mathbf{p}^B$  nu este valid.
2. când se compun două transformări, sistemul de coordonate sursă al referinței a două trebuie să fie același cu destinația primei referințe. De exemplu,  $T_A^C = T_B^C T_A^B$  este permis, însă  $T_A^B T_B^C$  nu este permis.
3. Când se inversează o transformare, ordinea sistemelor de referință se inversează:  $(T_A^B)^{-1} = T_B^A$ .
4. Superscriptul coordonatelor trebuie să coincidă atunci când ele se adună sau se scad. De exemplu,  $\mathbf{a}^W - \mathbf{b}^W$  reprezintă deplasamentul dintre două puncte exprimat în sistemul de referință al lumii.  $\mathbf{a}^W - \mathbf{b}^C$  este o operație ilegală.

Tot prin convenție, o coordonată fără superscript este considerată ca fiind exprimată în sistemul de referință al lumii  $W$ :  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}^W$ . De asemenea, o transformare  $T_A$  este echivalentă cu o transformare de la  $A$  la  $W$ :  $T_A \equiv T_A^W$ .

# Bibliografie

---

---

- [1] K. Hauser, *Robotic Systems*. Illinois, IL, USA: university of illinois urbana-champaign, 2023. [Online]. Available: <https://motion.cs.illinois.edu/RoboticSystems/>