Universitatea Transilvania din Braşov
Laboratorul de Vedere Artificială Robustă şi Control

Metode Numerice

Curs 7

Integrarea numerică

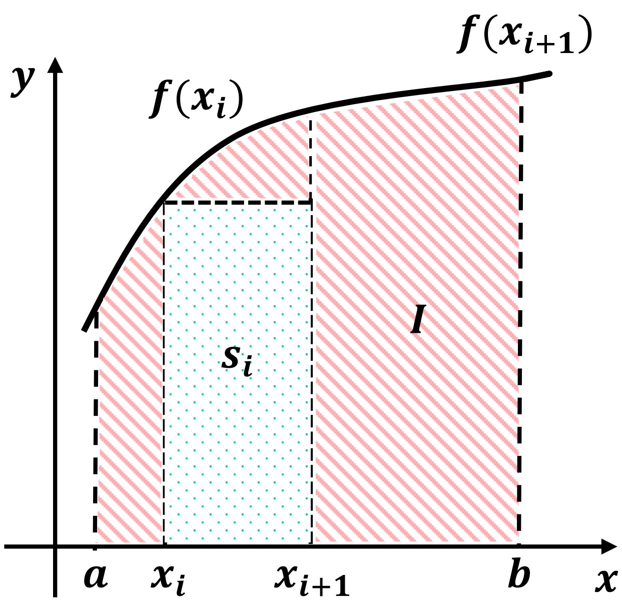
Gigel Măceșanu

Cuprins

- Introducere
- Metoda trapezului și eroarea de trunchiere
- Metoda lui Richardson
- Metoda lui Simpson
- Metoda lui Gauss

Integrarea numerică

- Calculul are drept scop determinarea numerică a valorii integralei $\int_a^b f(x) \cdot dx$, unde $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, iar a și b sunt finite
- Două grupe de metode:
  - Metode ce împart intervalul de integrare în subintervale de aceeași lungime, numărul subintervalelor fiind impus de operator, de ex:
    - metoda dreptunghiului, metoda trapezului, metoda lui Richardson și metoda lui Simpson;
  - Metode ce împart intervalul de integrare în așa fel încât eroarea de calcul să fie minimă, de ex:
    - metoda cuadraturii a lui Gauss



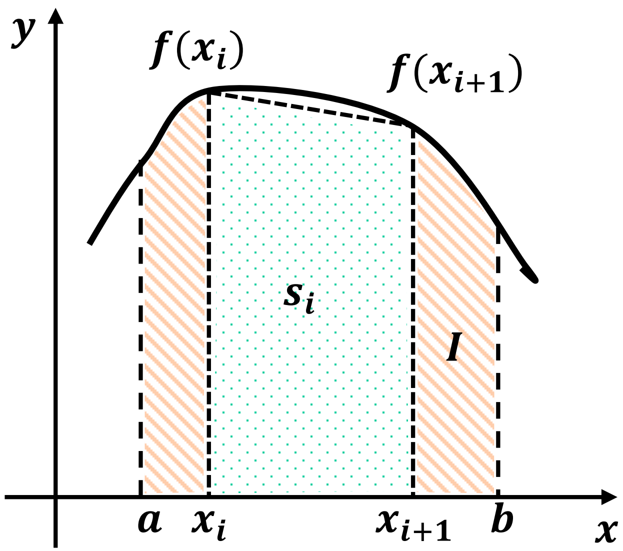
Metoda trapezului

- Intervalul $[a, b]$ se împarte în n subintervale de lungime egale

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = h,\ \ i = \overline{0, n-1}, x_0 = a, x_n = b$$

- Pentru simplificare notăm $y_i = f(x_i)$ și $y_{i+1} = f(x_{i+1})$
- Integrala I_i poate fi aproximată cu aria trapezului $(x_i, y_i, y_{i+1}, x_{i+1})$

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cdot \mathrm{d}x \cong \frac{h}{2} \cdot \left(y_i + y_{i+1}\right)$$



- Această aproximare permite determinarea valorii integralei prin relația:

$$I = \sum_{i=0}^{n} I_i = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n\right)$$

- relația de calcul a integralei definite, prin metoda trapezelor, va fi următoarea:

$$I = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + \cdots + 2 \cdot y_{n-2} + 2 \cdot y_{n-1} + y_n\right)$$

Eroarea de trunchiere pentru metoda trapezului

- Pentru a putea evalua eroarea de trunchiere se va utiliza relația de dezvoltare în serie Taylor a funcției $f(x)$ în jurul punctelor x_i și x_{i+1}
- Vom păstra termenii până la derivata de ordinul 2

$$f_1(x) = f(x_i) + (x - x_i) \cdot f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} \cdot f''(x_i)$$

$$f_2(x) = f(x_{i+1}) + (x - x_{i+1}) \cdot f'(x_{i+1}) + \frac{(x - x_{i+1})^2}{2} \cdot f''(x_{i+1})$$

- Pentru simplificare se vor introduce notațiile amintite anterior

$$f_1(x) = y_i + (x - x_i) \cdot y_i' + \frac{(x - x_i)^2}{2} \cdot y_i''$$

$$f_2(x) = y_{i+1} + (x - x_i - h) \cdot y_{i+1}' + \frac{(x - x_i - h)^2}{2} \cdot y_{i+1}''$$

Eroarea de trunchiere pentru metoda trapezului

- **Vom construi o nouă funcție care aproximează cel mai bine funcția în intervalul (x_i, x_{i+1}), ca media acestor două funcții:**

$$f(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$$

$$f_1(x) = y_i + (x - x_i) \cdot y_i' + \frac{(x - x_i)^2}{2} \cdot y_i''$$

$$f_2(x) = y_{i+1} + (x - x_i - h) \cdot y_{i+1}' + \frac{(x - x_i - h)^2}{2} \cdot y_{i+1}''$$

$$f(x) = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} + (x - x_i) \cdot \frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} - \frac{h}{2} \cdot y_{i+1}' + \frac{(x - x_i)^2}{4} \cdot \left(y_{i+1}'' + y_i''\right) - \frac{(x - x_i) \cdot h}{2} \cdot y_{i+1}'' + \frac{h^2}{4} \cdot y_{i+1}''$$

- **Prin integrarea acestei funcții de la x_i la x_{i+1} și reducerea termenilor asemenea vom obține:**

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \frac{h}{2} \cdot (y_{i+1} + y_i) - \frac{h^2}{4} \cdot \left(y_{i+1}' - y_i'\right) + \frac{h^3}{12} \cdot \left(y_{i+1}'' + y_i''\right)$$

Eroarea de trunchiere pentru metoda trapezului

- **Pornind de la rezultatele anterioare**

$$I_i = \frac{h}{2}\cdot\left(y_{i+1}+y_i\right) - \frac{h^2}{4}\cdot\left(y'_{i+1}-y'_i\right) + \frac{h^3}{12}\cdot\left(y''_{i+1}+y''_i\right) \qquad I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cdot \mathrm{d}x \cong \frac{h}{2}\cdot\left(y_i + y_{i+1}\right)$$

- **Eroarea de trunchiere produsă la această metodă poate fi apreciată ca fiind egală cu:**

$$e_{Ti} = -\frac{h^2}{4}\cdot\left(y'_{i+1}-y'_i\right) + \frac{h^3}{12}\cdot\left(y''_{i+1}+y'_i\right)$$

- **Pentru valori mici ale lui h primul termen are valoarea dominantă.**

- **Vom presupune că eroarea de trunchiere are expresia:**

$$e_{Ti} = K\cdot h^2\cdot\left(y'_{i+1}-y'_i\right)$$

- **Presupunând derivatele de ordinul unu ca fiind aproximativ constante pe intervalul de integrare, eroarea de trunchiere poate fi aproximată prin:**

$$e_T = c\cdot h^2$$

unde c este o constantă

Metoda lui Richardson

- Se pleacă de la eroarea de trunchiere a metodei trapezului pentru o diviziune h: $$h = \frac{b-a}{n} \qquad e_T = c \cdot h^2$$
- O altă diviziune $\boldsymbol{k = \frac{b-a}{m}}$ conduce la eroarea de trunchiere $\boldsymbol{e_T = c \cdot k^2}$
- Astfel, următoarele relații pot fi scrise:

$$I = I_h + c \cdot h^2 \qquad I = I_k + c \cdot k^2$$

- Prin scădere se obține: $$c = \frac{I_h - I_k}{k^2 - h^2}$$
- Valoarea integralei se poate scrie sub forma:

$$I = I_h + \frac{I_h - I_k}{k^2 - h^2} \cdot h^2 \qquad I = I_h + \frac{I_h - I_k}{\frac{k^2}{h^2} - 1}$$

- expresie ce poartă denumirea de *formula lui Richardson* și are o precizie mai mare decât metoda trapezului.

Metoda lui Simpson

- **Metoda este similară metodei trapezelor deoarece presupune divizarea intervalului de integrare în subintervale iar funcția de integrat trebuie evaluată la capetele acestor subintervale**
- **În *metoda Simpson* este utilizată o parabolă (polinom de gradul 2) pentru aproximarea ariei corespunzătoare la două intervale adiacente**
- **Se pornește de la formula lui Richardson pentru două diviziuni între care**

avem relațiile: $k = 2h,\ k = \frac{b-a}{m},\ h = \frac{b-a}{n}$

- **Scriem formula metodei trapezului pentru fiecare diviziune în parte:**

$$I_h = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + 2 \cdot y_4 + 2 \cdot y_5 + \cdots \right)$$

$$I_k = h \cdot \left(y_0 + 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_4 + 2 \cdot y_6 + \cdots \right)$$

Metoda lui Simpson

- **Pentru $k = 2h$ relația** $I = I_h + \dfrac{I_h - I_k}{\dfrac{k^2}{h^2} - 1}$ **devine** $I = I_h + \dfrac{I_h - I_k}{4-1} = \dfrac{1}{3}\cdot\left(4\cdot I_h - I_k\right)$

- **Având în vedere relațiile inițiale:**

$$I_h = \frac{h}{2}\cdot\left(y_0 + 2\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 2\cdot y_3 + 2\cdot y_4 + 2\cdot y_5 + \cdots\right)$$

$$I_k = h\cdot\left(y_0 + 2\cdot y_2 + 2\cdot y_4 + 2\cdot y_6 + \cdots\right)$$

- **Obținem:**

$$I = \frac{h}{3}\cdot\left(y_0 + 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + 2\cdot y_4 + 4\cdot y_5 + 2\cdot y_6 \cdots\right)$$

- **Relația anterioară reprezintă formula de calcul a *metodei lui Simpson*.**

- **Precizia algoritmului este legată de numărul de puncte în care se evaluează funcția (pasul de integrare este mai mic)**

Metoda lui Gauss

- *Metoda lui Gauss* permite reducerea numărului de puncte în care trebuie să se evalueze funcția la două
- Metoda presupune efectuarea unei schimbări de variabilă astfel încât intervalul $[a, b]$ să fie reprezentat pe intervalul: $[-1, 1]$
- Avem următoarea formulă de substituție:

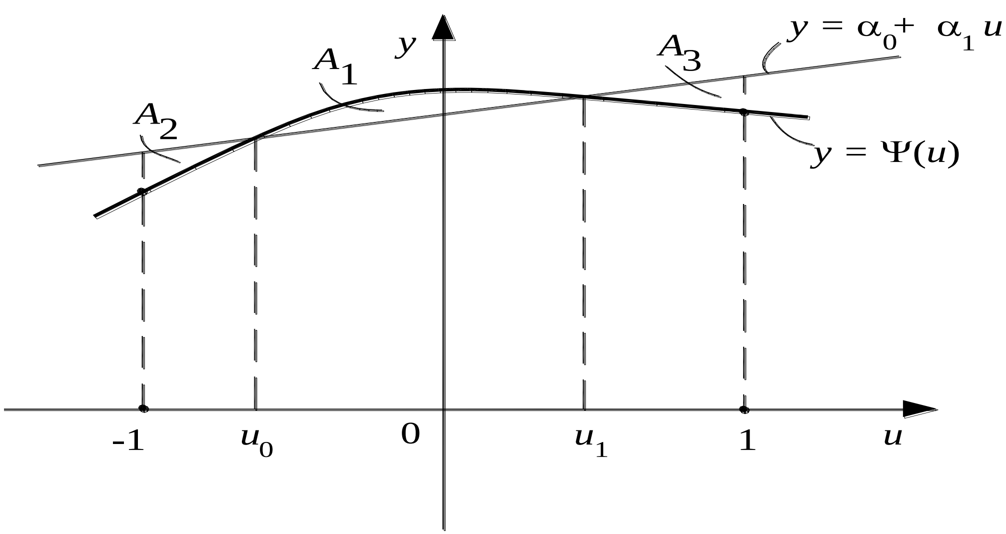
$$u = \frac{2}{b-a} \cdot x - \frac{b+a}{b-a}$$ iar derivata: $$\mathrm{d}u = \frac{2}{b-a} \cdot \mathrm{d}x$$

- Prin substituție avem: $x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$ și $dx = \frac{1}{2}(b-a)\,du$
- Ca urmare, $I = \int_a^b f(x)\,dx$ se transformă astfel:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left[\frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)\right] \cdot \frac{1}{2}(b-a)du = \int_{-1}^{1} \psi(\mathrm{u})\,du$$

Metoda lui Gauss

- **Formula de integrare trebuie să țină cont de următoarele:**
  - **Sunt utilizate două puncte din interiorul intervalului de integrare**
  - **Trebuie să returneze eroare zero pentru polinoame de grad maxim trei**
- **Metoda constă în determinarea unei drepte:** $\boldsymbol{y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot u}$
- **Din punct de vedere grafic condiția revine la egalitatea dintre aria $\boldsymbol{A_1}$ cuprinsă între graficul funcției și dreapta aflată deasupra dreptei și aria $\boldsymbol{A_2}$ cuprinsă între graficul funcției și dreapta aflată sub dreaptă ($\boldsymbol{A_1 = A_2 + A_3}$)**



$$I = \int_{-1}^{1} \psi(u) \cdot \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1} (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot u) \cdot \mathrm{d}u$$

Metoda lui Gauss

- Pentru a calcula integrala utilizând numai două evaluări ale funcției se mai pune condiția:

$$I = \int_{-1}^{1} \psi(u) \cdot \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1} (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot u) \cdot \mathrm{d}u = A_1 \cdot \psi(u_0) + A_2 \cdot \psi(u_1)$$

unde, u_0 și u_1 sunt puncte de divizare a intervalului, A_1 și A_2 sunt ponderi

- Pentru a determina valorile reale ale mărimilor $\alpha_0, \alpha_1, A_1, A_2, u_0, u_1$ se pune condiția de a se obține un rezultat exact în cazul unui polinom de ordinul al treilea
- Considerăm un polinom de grad trei, de forma particulară:

$$\psi(u) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot u + (u - u_0) \cdot (u - u_1) \cdot (\beta_0 + \beta_1 \cdot u)$$

- Integrala polinomului trebuie să fie zero

Metoda lui Gauss

- Valorile u_0 și u_1 se obţin punând condiţia de a fi îndeplinită egalitatea:

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\alpha_0 + \alpha_1 \cdot u + (u - u_0)\cdot(u - u_1)\cdot(\beta_0 + \beta_1 \cdot u)\right)\cdot \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1} (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot u)\cdot \mathrm{d}u$$

- După reducerea termenilor asemenea se obține:

$$\int_{-1}^{1} (u - u_0)\cdot(u - u_1)\cdot(\beta_0 + \beta_1 \cdot u)\cdot \mathrm{d}u = 0$$

- În continuare se pune condiția ca această egalitate să fie îndeplinită oricare ar fi valorile coeficienților β_0 și β_1

- Pentru perechea de valori: $\beta_0 = 1$ și $\beta_1 = 0$ se obține egalitatea:

$$\int_{-1}^{1} (u - u_0)\cdot(u - u_1)\cdot \mathrm{d}u = 0$$

- Expresie care devine:

$$\int_{-1}^{1} u^2 \cdot \mathrm{d}u + (u_0 + u_1)\cdot \int_{-1}^{1} u \cdot \mathrm{d}u + u_0 \cdot u_1 \cdot \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u = 0$$

Metoda lui Gauss

- **După rezolvarea integralelor obținem: $\frac{2}{3} + 2u_0 \cdot u_1 = 0 \rightarrow u_0 \cdot u_1 = -\frac{1}{3}$**
- **Pentru perechea de valori: $\beta_0 = 0$ și $\beta_1 = 1$ se obține egalitatea:**

$$\int_{-1}^{1} (u - u_0) \cdot (u - u_1) \cdot u \cdot \mathrm{d}u = 0$$

- **Expresia devine:** $$\int_{-1}^{1} u^3 \cdot \mathrm{d}u + (u_0 + u_1) \cdot \int_{-1}^{1} u^2 \cdot \mathrm{d}u + u_0 \cdot u_1 \cdot \int_{-1}^{1} u \cdot \mathrm{d}u = 0$$
- **După rezolvarea integralelor obținem: $-\frac{2}{3}(u_0 + u_1) = 0$, adică $u_0 + u_1 = 0$**
- **Astfel, avem un sistem de forma următoare, cu soluțiile aferente:**

$$\begin{cases} u_0 + u_1 = 0 \\ u_0 \cdot u_1 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad u_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Metoda lui Gauss

- **Coeficienții A_1 și A_2 se obţin punând condiţia de a fi îndeplinită egalitatea:**

$$I = \int_{-1}^{1} (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot u) \cdot \mathrm{d}u = A_1 \cdot \psi(u_0) + A_2 \cdot \psi(u_1)$$

- **Expresia poate fi scrisă și astfel:**

$$\alpha_0 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u + \alpha_1 \int_{-1}^{1} u \cdot \mathrm{d}u = A_1 \cdot \psi(u_0) + A_2 \cdot \psi(u_1)$$

- **Întrucât:** $\psi(u_0) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot u_0$ **și** $\psi(u_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot u_1$

- **După rezolvarea integralelor, înlocuirea lui u_0 și u_1, gruparea termenilor, integrala devine:**

$$2 \cdot \alpha_0 = A_1 \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot u_0) + A_2 \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot u_1) \qquad u_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha_0 \cdot (A_1 + A_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \alpha_1 \cdot (-A_1 + A_2) = 2 \cdot \alpha_0$$

Metoda lui Gauss

- Se pune condiția ca această egalitate să fie îndeplinită oricare ar fi valorile coeficienților α_0 și α_1. Avem astfel:

$$\alpha_0 \cdot (A_1 + A_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \alpha_1 \cdot (-A_1 + A_2) = 2 \cdot \alpha_0$$

  - **Pentru $\boldsymbol{\alpha_0 = 1}$ și $\boldsymbol{\alpha_1 = 0: A_1 + A_2 = 2}$**
  - **Pentru $\boldsymbol{\alpha_0 = 0}$ și $\boldsymbol{\alpha_1 = 1: -A_1 + A_2 = 0}$**

- Se obține un sistem, care după rezolvare conduce la: $A_1 = 1$ și $A_2 = 1$

- În consecință, formula de integrare prin metoda Gauss va avea expresia, după înlocuirea în formula inițială, astfel:

$$I = \int_{-1}^{1} \psi(u) \cdot \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1} (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot u) \cdot \mathrm{d}u = A_1 \cdot \psi(u_0) + A_2 \cdot \psi(u_1)$$

$$I = \psi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \psi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Contact:
Email: gigel.macesanu@unitbv.ro
Web: rovis.unitbv.ro