2. Algebra liniară în Python

Matrice și vectori
Adunarea matricelor și înmulțirea cu scalari
Multiplicarea matricelor
Inversa și transpusa unei matrice

În acestă lucrare de laborator se vor prezenta elemente de bază ale algebrei liniare (matrice, vectori și operații cu acestea) exemplificate în Python. Pentru a putea fi rulate aceste exemple, este nevoie de Python în versiunea minimă 2.7 și de modulul NumPy.

2.1 Matrice și vectori

O matrice este un tabel de numere, de obicei bidimensional, reprezentat în felul următor:

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Aceasta este o matrice bidimensională, având dimensiunile m și n. Considerăm că această matrice aparține spațiului $R^{m \times n}$. Dimensiunea unei matrice bidimensionale este dată de numărul de linii $\times$ numărul de coloane.

2.1.1 Adresarea elementelor unei matrice

De exemplu, putem folosi următoarea matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 123 & 231 & 546 \\ 431 & 876 & 111 \\ 654 & 256 & 129 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

din care se adresează elemente individuale în felul următor:

$$A_{1,1} = 123,$$
$$A_{1,3} = 546,$$
$$A_{2,2} = 876,$$
$$A_{3,1} = 654.$$

Generalizând, putem spune că elementul de pe linia m și coloana n are valoarea $A_{m,n}$.

2.1.2 Vectorii

Vectorii sunt un caz particular al matricelor, în general folosindu-se vectorii-coloană:

$$y = \begin{pmatrix} 333 \\ 211 \\ 356 \\ 414 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Vectorul y din ecuația 2.3 este o matrice unidimensională $y \in R^{4\times 1}$. Adresarea unui element dintr-un vector se face în felul următor:

$$y_1 = 333,$$
$$y_4 = 414.$$

Observație: în aceste exemple, am folosit adresarea începând de la indexul 1. Însă, în majoritatea limbajelor de programare, se folosește adresarea începând de la indexul 0. Așadar, de exemplu, pentru a accesa primul element din vectorul de mai sus, vom avea în loc de $y_1 = 333$, $y_0 = 333$.

2.2 Adunarea matricelor și înmulțirea cu scalari

Pentru a putea aduna două matrice A și B este necesar ca acestea să aibă aceleași dimensiuni, adică $A \in R^{m,n}$ și $B \in R^{m,n}$. Vom lua, ca exemplu, adunarea a două matrice A și B, iar rezultatul îl vom numi C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

iar matricea C va avea valoarea:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Înmulțirea matricelor cu scalari este, de asemenea, simplă și o vom exemplifica în ecuația 2.6:

$$2 \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 16 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

2.3 Multiplicarea matricelor

Dacă vrem să înmulțim două matrice A și B, trebuie să avem grijă ca acestea să aibă dimensiuni compatibile: A trebuie să fie de forma $R^{m\times n}$, iar B trebuie să fie de forma $R^{n\times p}$. Rezultatul acestei înmulțiri va fi de forma $R^{m\times p}$. Fiecare linie a matricei A se înmulțește cu fiecare coloană a matricei B. Rezultatele intermediare se adună, iar suma va forma elementul matricei rezultat. Vom lua ca exemplu matricea A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

și o vom înmulți cu matricea B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Se poate observa că matricea A are dimensiunea 3×2, iar matricea B are dimensiunea 2×3. Acestea au dimensiuni compatibile pentru a fi înmulțite. Rezultatul va avea dimensiunea 3×3:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 2\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 3 + 1\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 3\cdot 2 & 3\cdot 2 + 3\cdot 1 & 3\cdot 3 + 3\cdot 3 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Așadar vom obține matricea $C \in R^{3\times 3}$:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Observație: înmulțirea matricelor nu este **comutativă**, însă este **asociativă**.

2.3.1 Matricea identitate

Matricea identitate este elementul neutru la înmulțirea matricelor, se notează cu I sau $I_{n\times n}$, este o matrice pătratică și are proprietatea $A \cdot I = A$. Aceasta este formată din cifra 1 pe diagonala principală și 0 în rest.

În următorul exemplu se prezintă matricea identitate cu dimensiunea 3×3:

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

2.4 Inversa și transpusa unei matrice

2.4.1 Inversa unei matrice

Matricea inversă a matricei pătratice A se notează cu A^{-1} și are proprietatea ca $A^{-1} \cdot A = I$. Nu toate matricele sunt inversabile, iar acelea care nu deţin o matrice inversă se numesc *matrice singulare*. Dându-se următoarea matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

inversa sa este:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.05 & 0,075 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Prin înmulțire, vom obține:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.05 & 0,075 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

2.4.2 Transpusa unei matrice

Dacă avem o matrice A, atunci transpusa acesteia, notată cu A^T se obține inversându-se liniile cu coloanele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} => A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

2.5 Cerinţe

Se dau următoarele matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 23 & 38 & 65 \\ 32 & 22 & 12 & 44 \\ 33 & 12 & 67 & 11 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 22 \\ 30 & 31 & 32 \\ 40 & 41 & 42 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Să se scrie un script Python care, folosind modulul NumPy, calculează și afișează:

1. $A^T + B$,
2. $B^T + A$,
3. $A - B^T$,
4. $5 \times (A^T)$,
5. $(A \cdot B)^T + I_3$,
6. C^{-1}.

Funcții utile:

- `numpy.linalg.inv(a)` - calculează inversa unei matrice
- `numpy.dot(a, b)` - produsul matricelor

- `numpy.transpose(a)` - transpusa unei matrice

Atenție: aceste funcții returnează rezultatul operației respective.